ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΝ ΚΛΕΙΣΤΩΝ ΑΓΩΓΩΝ

1.1 Γενικά

Η ***Μηχανική των Ρευστών*** είναι ο γενικός τίτλος ο οποίος δίδεται εις την μελέτην όλων των ρευστών τα οποία αφορούν τους Μηχανικούς. Η ***Υδραυλική Μηχανική***, ούσα τμήμα της Μηχανικής των Ρευστών, επικεντρούται εις την μελέτην των υγρών ήτοι των ασυμπιέστων ρευστών και αποσκοπεί προς την εφαρμογήν της επιστήμης της Μηχανικής των Ρευστών καθώς και άλλων γνωστικών αντικειμένων Μηχανικής και Θετικών Επιστημών. Πρωταρχικώς ενδιαφέρεται διά την ανάλυσιν και τον σχεδιασμόν υδραυλικών κατασκευών ως και την ανάπτυξιν έργων και συστημάτων υδατίνων πόρων.

Η ροή ύδατος, πετρελαίου, φυσικών αερίων κ.ά. εντός κλειστών αγωγών, κυρίως κυκλικής διατομής, είναι κεφαλαιώδους σημασίας διά την επιστήμην του Πολιτικού Μηχανικού. Τα ρευστά τα οποία κυρίως αναλύονται εις το παρόν σύγγραμμα είναι: το ύδωρ, το ακάθαρτον ύδωρ, τα λύματα των αποχετεύσεων, πετρέλαια και αέρια ως αήρ, οξυγόνον, αέριον βιομάζης και φυσικόν αέριον. Το ύδωρ μεταφέρεται εκ των πηγών του διά των αγωγών μεταφοράς προς τους χώρους επεξεργασίας του και εκείθεν διανέμεται προς κατανάλωσιν διά του δικτύου υδρεύσεως. Το πετρέλαιον μεταφέρεται δι΄ αγωγών υπό πίεσιν προς τα διυλιστήρια. Το φυσικόν αέριον μεταφέρεται διά του συστήματος διανομής. Πλέον αναλυτικώς αι διάφοραι εφαρμογαί της ροής διά των αγωγών αφορούν αστικούς σκοπούς, βιομηχανικούς σκοπούς, αποχετεύσεις, υδροηλεκτρικά έργα παραγωγής ενεργείας, έργα

αντλήσεως-ταμιεύσεως ύδατος, μεταφορά σκυροδέματος, αποστραγγίσεις, μεταφορά λυμάτων κ.ά.

Η ροή των πραγματικών ρευστών προκαλεί απωλείας ενεργείας. Διά να υπάρξη κίνησις του ρευστού πρέπει να υπερνικηθούν αι δυνάμεις αντιστάσεως της ροής. Ο Υδραυλικός Μηχανικός πρέπει να αντιληφθή ότι η διαφορά υδραυλικού φορτίου είναι εκείνη η οποία θα ενεργοποιήση την κίνησιν του ρευστού (παροχήν) διά του αγωγού. Αι απώλειαι ενεργείας λόγω τριβής της ροής ελαττώνουν πάντοτε την διαφοράν φορτίου κατά την κατεύθυνσιν ροής. Η ροή είναι δυνατόν να πραγματοποιηθή διά φυσικής κατακλίσεως. Εις πλείστας όσας περιπτώσεις μεταφοράς ρευστών απαιτείται η χρήσις αντλιών. Η αντλία προσδίδει το απαραίτητον υδραυλικόν φορτίον εις το ρευστόν προς επίτευξιν του σχεδιασμού λειτουργίας του συστήματος μεταφοράς.

Διά την επίλυσιν των προβλημάτων ροής εις κλειστούς αγωγούς χρησιμοποιούνται αι βασικαί εξισώσεις της Μηχανικής των Ρευστών ήτοι η διατήρησις της μάζης, η διατήρησις των ορμών και η διατήρησις της ενεργείας. Λόγω της πολυπλοκότητος των τριδιαστάτων εξισώσεων ροής γίνονται ορισμέναι παραδοχαί σχετικώς προς την ροήν. Εις την ακολουθώσαν ανάλυσιν εξετάζονται φαινόμενα ροής του χώρου της μιάς διαστάσεως και μόνον. Η ροή όμως δύναται να είναι σταθερά ή ασταθής, στρωτή ή τυρβώδης, στροβιλή ή αστρόβιλος. Η ροή του ύδατος, του ακαθάρτου ύδατος, των ελαίων και των αερίων εντός των αγωγών είναι σχεδόν τυρβώδης. Η ροή όμως των ακαθάρτων λυμάτων δύναται να είναι στρωτή. Η ανάλυσις πολυπλόκων δύο και τριών διαστάσεων ροών απαιτεί χρήσιν υπολογιστικών διαδικασιών και ηλεκτρονικών υπολογιστών και δεν αποτελεί μέλημα του παρόντος συγγραφικού έργου.

1.2 Διεθνές σύστημα μονάδων

Εις όλον το παρόν σύγγραμμα χρησιμοποιείται το ευρέως καθιερωθέν ***Διεθνές Σύστημα μονάδων*** *SI (Systeme International).* Αι βασικαί μονάδαι αι αφορώσαι την Υδραυλικήν των κλειστών αγωγών είναι,

μήκος	μέτρον	*(m)*
μάζα	χιλιόγραμμον	*(kg)*

χρόνος	δευτερόλεπτον	*(s)*
θερμοκρασία	*Kelvin*	^oK

Η σχέσις μεταξύ βαθμών *Kelvin* (^oK) και βαθμών *Celsius* (^oC) δίδει,

$$^oK = {}^oC + 273.15 \qquad \textbf{(1.1)}$$

Εις την επομένην Παράγραφον 1.3 δίδονται αναλυτικώς αι ιδιότηται και αι μονάδαι των φυσικών ποσοτήτων ροής. Συνοπτικώς και εν αναφορά προς το διεθνές σύστημα μονάδων δύναται να αναφερθούν τα κάτωθι.

Η μονάς δυνάμεως είναι το *Newton (N),* τουτέστιν η δύναμις η οποία εφαρμοσμένη επί μάζης *1.0 kg* δίδει επιτάχυνσιν *1.0* m/s^2. Ευρέως χρησιμοποιουμένη μονάς δυνάμεως είναι και το χιλιόγραμμον βάρους *(kgf)* ή (kg^*). Αύτη είναι η δύναμις η οποία εφηρμοσμένη επί μάζης *1.0 kg* δίδει επιτάχυνσιν βαρύτητος. Επομένως, ισχύει ότι *1.0 kgf =9.807 N* δεδομένου ότι η διεθνώς αποδεκτή τιμή της επιταχύνσεως της βαρύτητος είναι *9.807* m/s^2. Να τονισθή ότι το χιλιόγραμμον βάρους *(kgf)* είναι μονάς δυνάμεως ενώ το χιλιόγραμμον *(kg)* είναι μονάς μάζης.

Η πυκνότης ορίζεται ως η μάζα ανά μονάδαν όγκου και μετρείται εις kg/m^3. Το ειδικόν βάρος ορίζεται ως το βάρος ανά μονάδαν όγκου και μετρείται εις N/m^3. Προκειμένου περί ύδατος και εις τους 4^oC η πυκνότης είναι $1000.0\ kg/m^3$. Επειδή το ειδικόν βάρος είναι το γινόμενον της πυκνότητος επί την επιτάχυνσιν της βαρύτητος, τότε το ειδικόν βάρος του ύδατος είναι $9807\ N/m^3$ και επί το πρακτικώτερον $9810\ N/m^3$.

Η μονάς πιέσεως είναι $1.0\ N/m^2$ και ονομάζεται *Pa* προς τιμήν του *Pascal.* Διά πρακτικούς λόγους χρησιμοποιείται το *bar.* Ισχύει ότι *1.0 bar* ισούται προς $100000\ N/m^2$. Η πίεσις *p* δύναται να εκφρασθή ως εν ισοδύναμον ύψος *h* χρησιμοποιώντας την εξίσωσιν $p=\rho gh$. Υπό κανονικάς τιμάς πιέσεως και θερμοκρασίας και διά το καθαρόν ύδωρ ισχύει ότι $p=9810\ h$. Ούτως *1.0 m* ύδατος ισούται προς $9810\ N/m^2$ *(Pa)* ενώ *1.0 mm* ύδατος ισούται προς $9.81\ N/m^2$. Επίσης, διά πρακτικούς λόγους η σχέσις μετατροπής της πιέσεως μεταξύ του Αυτοκρατορικού Συστήματος μονάδων και

του Διεθνούς Συστήματος μονάδων είναι, *14.5038* lbf/ in^2 ισούνται προς *1.0 bar.*

1.3 Ιδιότηται των ρευστών

1.3.1 Συμπιεστότης

Τα ρευστά είναι υλικά σώματα χωρίς ιδικόν των σχήμα και υπόκεινται εις μεγάλας παραμορφώσεις της γεωμετρίας των όταν ευρίσκονται υπό την επίδρασιν δυνάμεων. Ρευστά είναι τα υγρά και τα αέρια. Η κίνησίς των γνωστή ως ***ροή*** μελετάται υπό της επιστήμης της Μηχανικής των Ρευστών. Τα υγρά καταλαμβάνουν καθορισμένον όγκον και σχετικώς είναι ***ασυμπίεστα***. Τα αέρια καταλαμβάνουν τον μέγιστον διαθέσιμον προς αυτούς όγκον και είναι ***συμπιεστά***. Όταν όμως η ταχύτης των αερίων είναι σχετικώς μικρά *(< 60.0 m/s)* η ροή αυτών θεωρείται ότι είναι ασυμπίεστος και αι εξισώσεις αι διέπουσαι την ροήν είναι ίδαι προς τας εξισώσεις κινήσεως των υγρών. Διά ταχύτητας μεγαλυτέρας των *60.0 m/s* η μεταβολή της πυκνότητος των αερίων άρχει του να είναι σημαντική. Η μελέτη των συμπιεστών ρευστών είναι γνωστικόν αντικείμενον και της Μηχανικής Ρευστών και της Θερμοδυναμικής.

1.3.2 Πυκνότης και ειδικόν βάρος

Μεταξύ της ***μάζης*** *m (kg)* και του ***βάρους*** *B (N)* ενός σώματος ρευστού υφίσταται η εξίσωσις,

$$B = mg \tag{1.2}$$

όπου *g* (m/s^2) είναι η ***επιτάχυνσις της βαρύτητος***. Συνήθης τιμή αυτής περί τα Ελληνικά γεωγραφικά πλάτη είναι $9.807\ m/s^2$.

Πυκνότης $\rho(kg/m^3)$ είναι η μάζα του ρευστού η περιεχομένη εις την μονάδαν του όγκου του $V(m^3)$. Είναι,

$$\rho = lim_{\delta V \to 0} \frac{\delta m}{\delta V} \tag{1.3}$$

Η πυκνότης του καθαρού ύδατος εις τους 4^oC είναι $1000.0\ kg/m^3$, ενώ εις τους 20^oC είναι $998.2\ kg/m^3$. ***Ειδικόν βάρος*** $\gamma(N/m^3)$ είναι η δύναμις η οποία δρά επί της μάζης του υλικού του περιεχομένου εις την μονάδαν όγκου. Είναι,

$$\gamma = \rho g \tag{1.4}$$

Να αναφερθή και η έννοια της ***σχετικής πυκνότητος*** δ ήτις είναι ο λόγος της μάζης ή του βάρους δοθέντος όγκου ρευστού προς την μάζαν ή το βάρος ίσου όγκου ύδατος θερμοκρασίας 4° C. Εκ του ορισμού τούτου η σχετική πυκνότης είναι αδιάστατος ποσότης.

1.3.3 Ιξώδες ρευστού και διατμητική τάσις

Ιξώδες μ (Ns/m^2) ή (kg/ms) είναι η παράμετρος η οποία παριστά την ύπαρξιν εφαπτομενικών δυνάμεων επί του ρευστού κατά την κίνησίν του. Διά στρωτήν ροήν, ιδέ και Κεφάλαια 3 και 4, ισχύει,

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \tag{1.5}$$

ή

$$\mu = \frac{\tau}{du/dy} = \frac{\text{διατμητική τάσις}}{\text{κλίσις διατμητικής επιμηκύνσεως}} \tag{1.6}$$

ένθα τ (N/m^2) η ***διατμητική τάσις*** και du/dy η ***κλίσις των ταχυτήτων*** ήτοι η μεταβολή της ταχύτητος ως προς την απόστασιν y (m). Τα ρευστά τα οποία υπακούουν εις την εξίσωσιν (1.5) ονομάζονται ***Νευτώνια ρευστά***. Εάν το ιξώδες του ρευστού είναι συνάρτησις της ταχύτητός του τότε η εξίσωσις της διατμητικής τάσεως εις την οποίαν υπακούουν τα ρευστά είναι μή-γραμμική και

ονομάζονται ***μή-Νευτώνια ρευστά.*** Εις τους 10^oC και υπό την ατμοσφαιρικήν πίεσιν η τιμή του ιξώδους του καθαρού ύδατος μ (Ns/m^2) είναι $1315x10^{-6}$ ενώ εις τους 20^oC και επίσης υπό την ατμοσφαιρικήν πίεσιν η τιμή του ιξώδους του καθαρού ύδατος πίπτει εις τους $1310x10^{-6}(Ns/m^2)$. ***Το κινηματικόν ιξώδες*** v (m/s^2) είναι ο λόγος του ιξώδους του ρευστού προς την πυκνότητάν του. Είναι,

$$v = \frac{\mu}{\rho} \tag{1.7}$$

Εις τους 10^oC και εις τους 20^oC και υπό την ατμοσφαιρικήν πίεσιν η τιμή του κινηματικού ιξώδους του καθαρού ύδατος v είναι $1.31x10^{-6}$ (m/s^2) και $1.01x10^{-6}$ (m/s^2), αντιστοίχως. Το κινηματικόν ιξώδες μεταβάλλεται εντόνως μετά της θερμοκρασίας. Αναλυτικοί πίνακες, ιδέ π.χ. *Lencastre* (1987), δίδουν τας φυσικάς ιδιότητας του καθαρού ύδατος και του αέρος ενώ παρουσιάζονται πίνακες ύδατος διαφόρου βαθμού αλατότητος.

1.3.4 Πίεσις

Η ***δύναμις*** $F(N)$ περιγράφεται υπό του Δευτέρου Νόμου της κινήσεως του Νεύτωνος και συνοψίζεται ως,

$$F = m\gamma \tag{1.8}$$

ένθα $\gamma(m/s^2)$ η ***επιτάχυνσις*** του ρευστού. ***Στατική πίεσις ή πίεσις*** $p(N/m^2)$ είναι η δύναμις η ασκουμένη επί της μονάδος επιφανείας A. Είναι,

$$p = \frac{F}{A} \tag{1.9}$$

Η πίεσις μετρείται εις N/m^2 ή εις πολλαπλάσια αυτών τα *bar* και είναι $1.0\ bar = 100000.0\ N/m^2$. Η πίεσις αναφέρεται ως προς μεν

την ατμοσφαιρικήν πίεσιν οπότε ονομάζεται ***σχετική πίεσις*** και δύναται να λάβη θετικάς τιμάς (υπερπίεσις ή απλώς πίεσις) ή αρνητικάς τιμάς (υποπίεσις), ως προς δε το απόλυτον κενόν οπότε ονομάζεται ***απόλυτος πίεσις*** και προφανώς λαμβάνει πάντοτε θετικάς τιμάς. Εις την Υδραυλικήν Μηχανικήν η πίεσις μετρείται εις μονάδας ύψους στήλης ύδατος. Εάν θεωρηθή ύδωρ εν ακινησία ύψους *h (m)* τότε η ασκουμένη πίεσις *p* είναι,

$$p = \rho g h \tag{1.10}$$

άρα,

$$h = \frac{p}{\rho g} \tag{1.11}$$

Επί παραδείγματι πίεσις *4000.0 N/m²* ισούται προς *0.4079 m* ύδατος, διότι ρ*=1000.0 kg/m³* και *g=9.807 m/s²*. Να αναφερθή ότι η ατμοσφαιρική πίεσις επί της επιφανείας της θαλάσσης είναι,

$$p_{ατμ} = 101325.0\,N/m^2 = 760.0\,mm\ Hg = 10.33m\ ύδατος \tag{1.12}$$

Εις τα *340.0 m* υψόμετρον η ατμοσφαιρική πίεσις πίπτει εις τα *97320.0 N/m² (=9.92 m ύδατος)* ενώ εις τα *1045.0 m* η ατμοσφαιρική πίεσις πίπτει εις τα *89370.0 N/m²(=9.11 m ύδατος)*.

1.3.5 Πίεσις τάσεως ατμών

Όταν υπό σταθεράν πίεσιν η θερμοκρασία του ύδατος αυξάνη, ο όγκος του άρχει αυξάνων και βαθμιαίως επέρχεται ο βρασμός του. Ο ανωτέρω τρόπος δεν είναι και ο μοναδικός τρόπος εξατμίσεως του ύδατος. Άλλος τρόπος είναι η μείωσις της πιέσεως υπό σταθεράν θερμοκρασίαν. Η πίεσις *p (N/m²)* υπό την οποίαν επέρχεται η εξάτμησις του ρευστού ονομάζεται ***πίεσις κορεσμένων ατμών*** και συμβολίζεται ως p_{wv} *(N/m²)* και η φυσική

αύτη διαδικασία ονομάζεται ***σπηλαίωσις***. Όταν η πίεσις του ύδατος μειούται ακόμη και εις μικράς τιμάς μειώσεως, ο αήρ ο εγκεκλεισμένος εντός του ύδατος δύναται να εξέλθη εκ τούτου ακολουθώντας διαδικασίαν ανάλογον της εξατμίσεως. Υπό κανονικήν ατμοσφαιρικήν πίεσιν το συνήθες ύδωρ περιέχει *2.0%* κατ΄ όγκον αέραν. Υπό συνθήκας όμως πιέσεως ημισείας της ατμοσφαιρικής το ποσοστόν αέρος εντός του ύδατος ανέρχεται εις *4.0 %.* Όσον λοιπόν μικροτέρα είναι η πίεσις τόσον μεγαλύτερον είναι το ποσόν του εγκεκλεισμένου αέρος εις τούτο. Όταν αι φυσσαλίδαι του αέρος κατά την διάρκειαν της σπηλαιώσεως κινηθούν προς τα κατάντη και προσκρούσουν εις πεδίον ροής υψηλής πιέσεως, τότε καταστρέφονται. Εάν η καταστροφή αυτή επισυμβεί εις περιοχάς πλησίον των στερεών ορίων της υδραυλικής κατασκευής τότε η συνεχής αύτη διαδικασία καταστροφής των φυσσαλίδων του αέρος δύναται να προκαλέση φθοράς εις τα στερεά τούτα όρια. Τοιαύτα παραδείγματα είναι αι καταστροφαί των υδατολισθήρων των εκχειλιστών υδροηλεκτρικών έργων, οι αγωγοί μεταφοράς, τα πτερύγια των αντλιών ή τα πτερύγια των υδροστροβίλων κ.ά. Εις τους *20°C* και υπό ατμοσφαιρικάς συνθήκας πιέσεως, η πίεσις των κορεσμένων ατμών του καθαρού ύδατος εις τα Ελληνικά γεωγραφικά πλάτη είναι *0.239 m* ύδατος. Εις τους *30°C* είναι *0.433 m* και προφανώς εις τους *100°C* είναι *10.33 m.*

1.3.6 Ελαστικότης

Το ***μέτρον ελαστικότητος E*** *(N/m²)* ***(bulk modulus of elasticity)*** του ρευστού ορίζεται ως η μεταβολή της πιέσεως ως προς την μεταβολήν του όγκου εις την μονάδαν όγκου,

$$E = \frac{\Delta p}{\Delta \rho / \rho} \tag{1.13}$$

Εις δύο διαφορετικάς καταστάσεις του ρευστού με πυκνότητας ρ_1 και ρ_2 και πιέσεις p_1 και p_2, αντιστοίχως ισχύει ότι,

$$p_2 = p_1 + E \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{1.14}$$

Όγκος ρευστού V (m^3) όστις υπόκειται εις διαφοράν πιέσεως Δp υφίσταται μεταβολή όγκου κατά ΔV. Επομένως, η εξίσωσις (1.13) δίδει,

$$\Delta V = -\frac{\Delta p}{E} V \qquad \textbf{(1.15)}$$

Η ***ταχύτης των ελαστικών κυμάτων*** c (m/s) είναι η ταχύτης μεταδόσεως της πιέσεως εντός του ρευστού. Αύτη δίδεται υπό της εξισώσεως,

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad \textbf{(1.16)}$$

Εις τους 20^oC και προκειμένου περί καθαρού ύδατος η τιμή του E είναι $2.1x10^9$ N/m^2. Χρειάζεται να ασκηθή πίεσις 700.0 N/m^2 προκειμένου να αυξηθή η τιμή του E κατά 2.0%.

1.4 Είδη ροής

Η πρώτη μεγάλη υποδιαίρεσις της ροής γίνεται εν αναφορά προς τον χρόνον. Η ροή θεωρείται ότι είναι ***σταθερά*** εις εν συγκεκριμένον σημείον x,y,z αν το διάνυσμα της ταχύτητος $\overline{q}$ παραμένη αμετάβλητον ως προς τον χρόνον,

$$\left(\frac{\partial \overline{q}}{\partial t}\right)_{x,y,z} = 0 \qquad \textbf{(1.17)}$$

Αντιθέτως, αν το διάνυσμα της ταχύτητος μεταβάλλεται ως προς τον χρόνον, τότε η ροή είναι ασταθής,

$$(\frac{\partial \overline{q}}{\partial t})_{x,y,z} \neq 0 \qquad \textbf{(1.18)}$$

Η ροή είναι ***ομοιόμορφος*** αν το διάνυσμα της ταχύτητος παραμένη αμετάβλητον κατά μήκος της ροϊκής γραμμής *s* εις οιονδήποτε χρόνον *t*,

$$(\frac{\partial \overline{q}}{\partial s})_{t} = 0 \qquad \textbf{(1.19)}$$

Αντιθέτως, η ροή χαρακτηρίζεται ως ***μή-ομοιόμορφος*** αν το διάνυσμα της ταχύτητος μεταβάλλεται κατά μήκος της ροϊκής γραμμής,

$$(\frac{\partial \overline{q}}{\partial s})_{t} \neq 0 \qquad \textbf{(1.20)}$$

Η ροή είναι ***συμπιεστή*** αν η πυκνότης του ρευστού ρ μεταβάλλεται σημαντικώς κατά μήκος της ροϊκής γραμμής,

$$(\frac{\partial \rho}{\partial s})_{x,y,z} \neq 0 \qquad \textbf{(1.21)}$$

Αντιθέτως, η ροή χαρακτηρίζεται ως ***ασυμπίεστος*** αν η πυκνότης δεν μεταβάλλεται κατά μήκος της ροϊκής γραμμής,

$$(\frac{\partial \rho}{\partial s})_{x,y,z} = 0 \qquad \textbf{(1.22)}$$

Η ροή χαρακτηρίζεται ως ***στρωτή*** εάν γίνεται κατά στρώσεις. Πολλάκις ονομάζεται και νηματώδης ή γραμμωτή ροή. Αν κατά τον ρουν δημιουργείται μείξις ως προς την κάθετον προς την διεύθυνσιν της ροής κατεύθυνσιν και μεταφορά ορμής, η ροή χαρακτηρίζεται ως ***τυρβώδης***. Τέλος, η ροή χαρακτηρίζεται ως ***στροβιλή*** εάν στοιχεία της ροής μετέχουν περιστροφικής κινήσεως πέριξ των κέντρων της μάζης των. Εάν δεν υπάρχει τοιαύτη περιστροφική κίνησις η ροή χαρακτηρίζεται ως ***αστρόβιλος***.

Τα πλείστα των ρευστών κατά την ροήν των είναι ***τριών-διαστάσεων*** με την έννοιαν του ότι η ταχύτης, η πίεσις και αι άλλαι φυσικαί μεταβληταί του προβλήματος μεταβάλλονται κατά τας τρεις διαστάσεις *x,y,z*. Προφανώς, δύναται να υπάρξη και μεταβολή ως προς τον χρόνον. Είναι όμως πάντα δυνατόν να γίνη σχετική απλοποίησις ούτως ώστε η ροή να θεωρηθή ***μιάς*** ή ***δύο διαστάσεων.*** Η ροή εντός των αγωγών κυκλικής διατομής άλλως πως ονομαζομένων σωλήνων ή σωληνωτών αγωγών, δύναται να θεωρηθή ως μιάς διαστάσεως οπότε η ροή χαρακτηρίζεται υπό μιάς αντιπροσωπευτικής ροϊκής γραμμής κατά μήκος της κεντρικού άξονος του αγωγού. Τότε αι μεταβολαί των ταχυτήτων και των πιέσεων εγκαρσίως προς τον κεντρικόν άξοναν του αγωγού αγνοούνται.

1.5 Διάρθρωσις ύλης

Κατά πρώτον ανεφέρθησαν τα είδη ροής εντός των κλειστών αγωγών, Κεφάλαιον 1 και ακολούθως αποδεικνύονται αι βασικαί εξισώσεις της Μηχανικής των Ρευστών ήτοι αι εξισώσεις της διατηρήσεως της μάζης, των ορμών και της ενεργείας, Κεφάλαιον 2. Η ροή των πραγματικών ρευστών (ύπαρξις διατμητικών τάσεων) και αι θεωρίαι περί οριακών στρωμάτων αναφέρονται εις το Κεφάλαιον 3. Η ανάλυσις της στρωτής ροής είτε εντός κυκλικών αγωγών είτε μεταξύ παραλλήλων πλακών δίδεται εις το Κεφάλαιον 4. Η κεφαλαιώδους σημασίας τυρβώδης ροή εντός των κυκλικής διατομής αγωγών αναλύεται εις το Κεφάλαιον 5. Αι τοπικαί απώλειαι φορτίου εις πλείστας όσας διατάξεις αναλύονται εις το Κεφάλαιον 6. Ακολούθως αναπτύσσονται αι γραμμικαί απώλειαι φορτίου μετά των ενεργειακών γραμμών και γραμμών πιέσεως, Κεφάλαιον 7. Η αντλία ήτις και αποτελεί την θεμελιώδην μηχανήν αναπτύξεως υδραυλικού φορτίου αναλύεται συστηματικώς εις το Κεφάλαιον 8. Εις το Κεφάλαιον 9 αναλύεται η ροή κατά τας

συνδέσεις μεταξύ αγωγών και δεξαμενών και εξετάζεται η μετάδοσις της ισχύος. Η ανάλυσις δικτύων αγωγών με την μέθοδον ***Hardy-Cross*** δίδεται εις το Κεφάλαιον 10. Τέλος, εις το Κεφάλαιον 11 δίδεται περιγραφή των μετρήσεων, των σχετικών διατάξεων μετρήσεως φυσικών ποσοτήτων ροής εντός κλειστών αγωγών με στοιχεία στατιστικής αναλύσεως σημάτων.

Πλείστα όσα προβλήματα Υδραυλικής επιλύονται πλέον διά της Υπολογιστικής Υδραυλικής Μηχανικής επιστήμης ήτις χρησιμοποιεί αριθμητικάς μεθόδους επιλύσεων των κανονικών και μερικών διαφορικών εξισώσεων αι οποίαι ελέγχουν την ροήν.

Μετά των σχετικών θεωριών περί ροής εντός κλειστών αγωγών επιλύονται και προβλήματα προς εμπέδωσιν του γνωστικού αντικειμένου. Διά την περαιτέρω κατανόησιν της ύλης ο αναγνώστης θα πρέπει να ανατρέξη εις την βιβλιογραφίαν του παρόντος συγγράμματος.

1.6 Προβλήματα επί των ιδιοτήτων των ρευστών

Πρόβλημα 1.1

Ρευστόν πυκνότητος *892.0 kg/m*^{3} υπόκειται εις πίεσιν *2.0 bar.* Να εκφρασθή η πίεσις εις *N/m*^{2} και εις μέτρα στήλης του ρευστού.

Λύσις

Επειδή *1.0 bar* ισούται προς *100000.0 N/m*^{2}, είναι,

$$p = 2.0\ bar = 2.0\ 100000.0 = 200000.0\ N/m^2$$

Εκ της εξισώσεως (1.11) δύναται να υπολογισθή το ύψος εις μέτρα στήλης του ρευστού, όχι του ύδατος επί του προκειμένου. Είναι,

$$h = \frac{p}{\rho g} = \frac{200000.0}{892.0\ 9.81} = 22.86\ m\ \ \text{στήλης ρευστού}$$

Πρόβλημα 1.2

Υγρόν ευρισκόμενον εντός κυλίνδρου καταλαμβάνει όγκον *45.0 l* υπό πίεσιν *4.5 bar*. Εάν ασκηθή πίεσις *13.0 bar* το υγρόν καταλαμβάνη όγκον *38.7 l*. Ζητείται να υπολογισθή το μέτρον ελαστικότητος *E* του υγρού.

Λύσις

Εκ της εξισώσεως (1.15) δύναται να υπολογισθή η τιμή του μέτρου ελαστικότητος *E*. Είναι,

$$\Delta V = -\frac{\Delta p}{E} V$$

αλλά, $V = 45.0\ l = 0.045\ m^3$, $p=4.5\ bar$ ισούνται προς $450000.0\ N/m^2$, με αναλόγους μετατροπάς διά τα *38.7 l* και *13.0 bar*, οπότε,

$$E = -\frac{\Delta p}{\Delta V} V = -\frac{1300000.0 - 450000.0}{0.0387 - 0.045} = 134.9\ MN/m^2$$

Πρόβλημα 1.3

Ζητείται να υπολογισθή η ταχύτης μεταδόσεως του ήχου εντός ύδατος θερμοκρασίας 10^oC και 20^oC. Αι αντίστοιχαι τιμαί του μέτρου ελαστικότητος είναι $2.05x10^9$ και $2.139x10^9\ N/m^2$, ενώ αι πυκνότηται του ύδατος εις τας αντιστοίχους θερμοκρασίας είναι *999.7* και $998.2\ kg/m^3$.

Λύσις

Εκ της εξισώσεως (1.16) δύναται να υπολογισθή η ταχύτης μεταδόσεως των διαταραχών (ήχου) ως,

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Δι΄ αντικατασάσεως των τιμών,

$$c = \sqrt{\frac{2.05\ 10^9}{999.7}} = 1432.0\ m/s$$

και

$$c = \sqrt{\frac{2.139\ 10^9}{998.2}} = 1462.7\ m/s$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 2

ΑΙ ΒΑΣΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

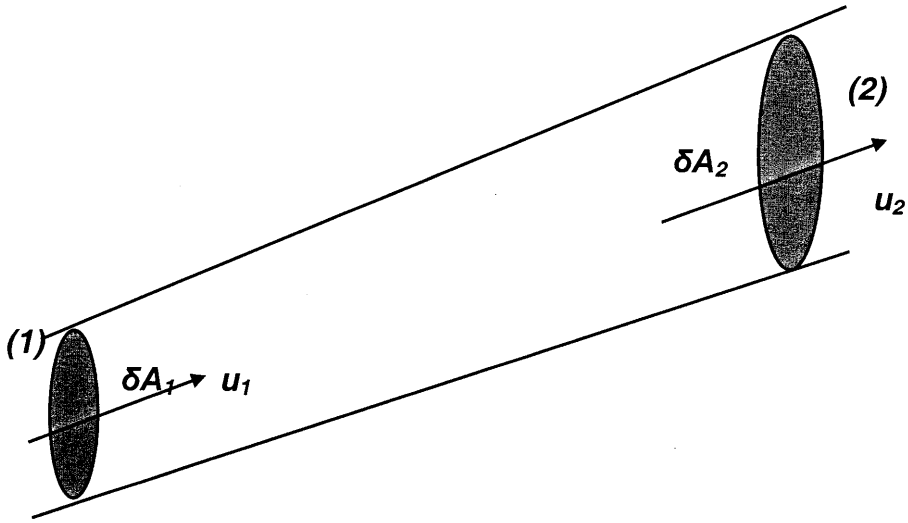
2.1 Συνέχεια της μάζης

2.1.1 Εξίσωσις της συνεχείας της μάζης κατά την μονοδιάστατον ροήν

Εις το Σχήμα 2.1 δεικνύεται εις στοιχειώδης "***ροϊκός σωλήν***" ο οποίος σχηματίζεται εξ ενός συνόλου εσωκλείστων ***ροϊκών γραμμών.*** Επειδή εξ ορισμού δεν υπάρχει ροή καθέτως προς τας ροϊκάς γραμμάς, το ρευστόν πρέπει να εισέλθη εντός του "ροϊκού σωλήνος" και να εξέλθη αυτού εκ των άκρων μερών του και μόνον. Ας σημειωθή ότι τα εμβαδά των διατομών εισόδου είναι $\delta A_1 (m^2)$ και εξόδου $\delta A_2 (m^2)$, ενώ αι αντίστοιχαι στοιχειώδεις ταχύτηται είναι u_1 και u_2. Είναι προφανές ότι η στοιχειώδης ***παροχή*** $\delta Q (m^3/s)$, δηλαδή η παρεχομένη ποσότης ρευστού $\Delta V\ (m^3)$ εις την μονάδαν χρόνου $\Delta t\ (s)$ δίδεται εκ της εξισώσεως,

$$\delta Q = u_1 \delta A_1 = u_2 \delta A_2 , \qquad \textbf{(2.1)}$$

Μετά την ολοκλήρωσιν εις όλον τον διαθέσιμον χώρον ροής η παροχή Q είναι,



Σχήμα 2.1 ***Στοιχειώδης ροϊκός σωλήν***

$$Q = U_1 A_1 = U_2 A_2 \qquad \textbf{(2.2)}$$

ένθα U_1 και U_2 αι ***μέσαι τιμαί των ταχυτήτων*** ενώ A_1 και A_2 είναι τα εμβαδά των διατομών εις την είσοδον *1* και έξοδον *2*, αντιστοίχως. Η τελική εξίσωσις της συνεχείας της μάζης δύναται να εκφρασθή ως,

$$Q = UA = \text{σταθερά} \qquad \textbf{(2.3)}$$

Η κατωτέρω εξίσωσις δίδει την ποσότηταν όγκου δV του ρευστού του διερχομένου διά της διατομής A εις την μονάδαν του χρόνου δt, δηλαδή την παροχήν. Είναι,

$$Q = \frac{\delta V}{\delta t} \tag{2.4}$$

Εις πολλάς όμως περιπτώσεις απαιτείται ο υπολογισμός της ***ροής μάζης*** $\dot{m} = \delta m / \delta t$ *(kg/s).* Επειδή όμως $m=\rho V$, τότε διά σταθεράν πυκνότηταν είναι $\delta m=\rho \delta V$ και εις την μονάδαν του χρόνου είναι,

$$\dot{m} = \frac{\delta m}{\delta t} = \rho \frac{\delta V}{\delta t} = \rho Q = \rho A U \tag{2.5}$$

Προκειμένου περί δύο σημείων *1* και *2* ενός αγωγού η ανωτέρω εξίσωσις δίδει,

$$\rho_1 U_1 A_1 = \rho_2 U_1 A_2 \tag{2.6}$$

ένθα ρ_1 και ρ_2 αι πυκνότηται του ρευστού εις τας αντιστοίχους θέσεις. Προφανώς δι΄ ***ασυμπίεστον ροήν*** $\rho_1 = \rho_2$ ισχύει η εξίσωσις (2.2). Όλαι αι ανωτέρω αναφερθείσαι περιπτώσεις αφορούν σταθεράν ροήν.

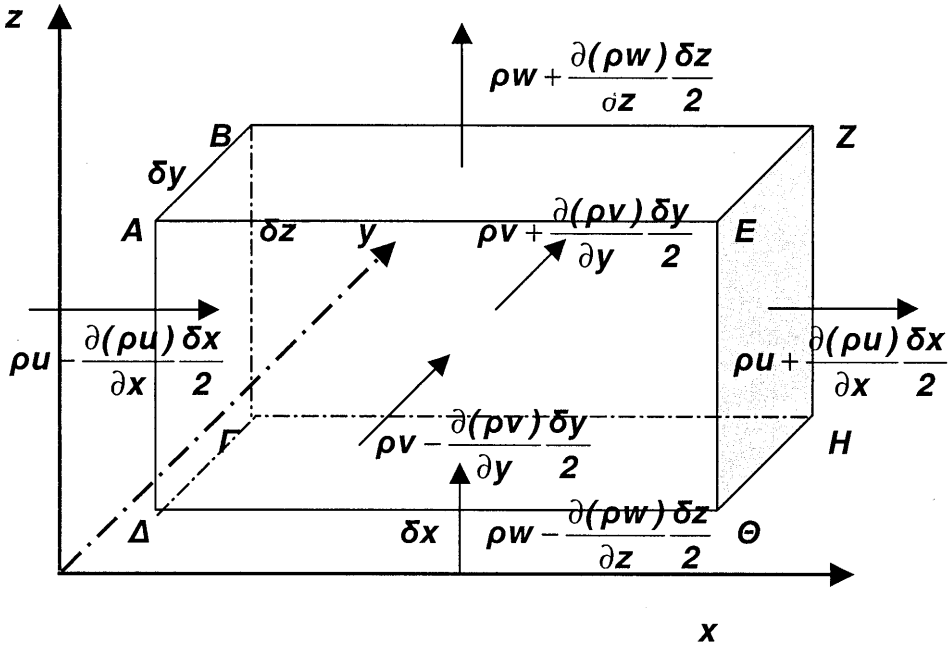
Εις την περίπτωσιν ασταθούς ροής και εντός του όγκου ελέγχου του περικλειομένου μεταξύ των διατομών *1* και *2* η διαφορά της εισερχομένης $\rho_1 U_1 A_1$ εκ της εξερχομένης μάζης $\rho_2 U_2 A_2$ ισούται προς την μεταβολήν της μάζης κατά το χρονικόν διάστημα δt. Διά $\delta t \rightarrow 0$ είναι,

$$\frac{dm}{dt} = \rho_1 U_1 A_1 - \rho_2 U_2 A_2 \tag{2.7}$$

2.1.2 Διαφορική μορφή της εξισώσεως της συνεχείας

Ας θεωρηθή ο στοιχειώδης όγκος ελέγχου του Σχήματος 2.2. Επί του κέντρου αυτού η πυκνότης του ρευστού είναι ρ και αι συνιστώσαι της ταχύτητος, αι παράλληλαι προς τους άξονας x, y

και *z*, είναι *u*, *v* και *w*, αντιστοίχως. Η ροή μάζης $\delta\dot{m}_{AB\Gamma\Delta}$ διά της επιφανείας *ΑΒΓΔ* ήτις είναι κάθετος προς την *u* συνιστώσα είναι,



***Σχήμα 2.2** Ροή διά στοιχειώδους όγκου ελέγχου*

$$\delta\dot{m}_{AB\Gamma\Delta} = [\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{\delta x}{2}]\delta y\delta z \qquad \textbf{(2.8)}$$

Ομοίως, η εξερχομένη ροή διά της επιφανείας *ΕΖΗΘ* είναι,

$$\delta\dot{m}_{EZH\Theta} = [\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{\delta x}{2}]\delta y\delta z \qquad \textbf{(2.9)}$$

επομένως η καθαρά εισροή διά των ανωτέρω δύο επιφανειών των καθέτων προς τον άξοναν των *x* είναι,

$$\delta\dot{m}_x = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\delta x\delta y\delta z \qquad \textbf{(2.10)}$$

Παρόμοιαι εκφράσεις δύνανται να γραφούν διά την καθαράν ροήν των υπολοίπων ζευγών των επιφανειών. Ούτως, η ολική καθαρή εισροή εντός του όγκου ελέγχου $\delta\dot{m} = \delta\dot{m}_x + \delta\dot{m}_y + \delta\dot{m}_z$. Εκ των ανωτέτρω είναι,

$$\delta\dot{m} = -[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}]\delta x\delta y\delta z \qquad \textbf{(2.11)}$$

Η αύξησις της ροής της μάζης εντός του όγκου ελέγχου είναι,

$$\delta\dot{m} = \frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial(\rho\delta x\delta y\delta z)}{\partial t} \qquad \textbf{(2.12)}$$

Δι΄ εξισώσεως των (2.11) και (2.12) είναι,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \qquad \textbf{(2.13)}$$

Η ανωτέρω εξίσωσις είναι ***η διαφορική μορφή της εξισώσεως της διατηρήσεως της μάζης*** και ισχύει δι΄ άπαντα τα ρευστά. Προφανώς δι΄ ασυμπίεστα ρευστά η πυκνότης είναι σταθερά άρα,

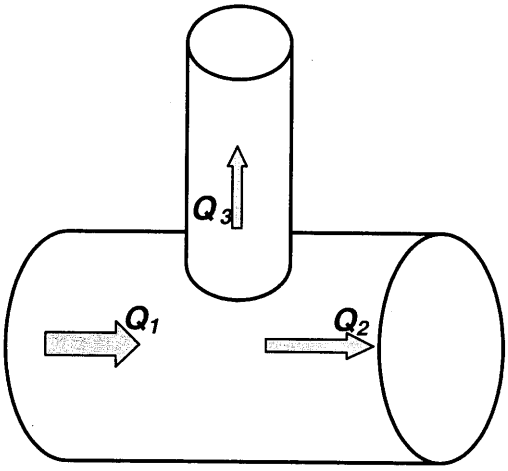
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad \textbf{(2.14)}$$

2.1.3 Προβλήματα επί της συνεχείας της μάζης

Πρόβλημα 2.1

Επί του Σχήματος 2.3 δεικνύεται τμήμα διακλαδώσεως δικτύου υδρεύσεως. Η διάμετρος του κυρίως αγωγού είναι *350.0 mm* ενώ του δευτερεύοντος αγωγού *120.0 mm.* Ο αγωγός με την μεγαλυτέραν διάμετρον και ανάντη της διακλαδώσεως παροχετεύει *0.045* m^3/s ενώ η μέση ταχύτης εις τα κατάντη της διακλαδώσεως και εντός του κυρίως αγωγού είναι *0.28 m/s.* Ζητείται να υπολογισθή η παροχή του αγωγού των *120.0 mm.*

Λύσις



Σχήμα 2.3 Σταθερά ροή εις διακλάδωσιν δικτύου υδρεύσεως

Ας υποτεθή ότι η ροή διά του αγωγού με την μικροτέραν διάμετρον έχει θετικήν φοράν προς τα άνω. Η εφαρμογή της εξισώσεως (2.3) της συνεχείας της μάζης επί της διακλαδώσεως του αγωγού απαιτεί όπως το σύνολον της εξερχομένης εκ της διακλαδώσεως παροχής $Q_2 + Q_3$, ιδέ Σχήμα 2.3, να ισούται προς την εισερχομένην παροχήν Q_1. Είναι,

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

Εκ της εκφωνήσεως του προβλήματος $Q_1 = 0.045\, m^3 / s$ ενώ η παροχή Q_2 είναι,

$$Q_2 = A_2 U_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} U_2 = \frac{\pi\, 0.350^2}{4} 0.28 = 0.0269\ m^3 / s$$

Επομένως,

$$Q_3 = Q_1 - Q_2 = 0.045 - 0.0269 = 0.0181\ m^3 / s$$

Η υπόθεσις ότι ροή βαίνει προς τά άνω (θετικόν πρόσημον) εντός του αγωγού με την μικροτέραν διάμετρον ορθώς έχει.

Πρόβλημα 2.2

Η παροχή ύδατος εξ αντλιοστασίου προς δεξαμενήν δικτύου υδρεύσεως ισούται προς *4.5 m^3/s*. Ταυτοχρόνως η δεξαμενή παροχετεύει *3.8 m^3/s* προς το δίκτυον υδρεύσεως. Η δεξαμενή είναι σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις βάσεως εμβαδού *A=8.0x15.0 (mxm)* και ύψος *12.0 m*. Αρχικώς το βάθος του ύδατος εντός της δεξαμενής ήτο *7.2 m*. Ζητείται να υπολογισθούν: α) η ταχύτης μεταβολής της ελευθέρας επιφανείας της δεξαμενής και β) το χρονικόν διάστημα το οποίον απαιτείται πριν διακοπή η παροχέτευσις ύδατος εκ της αντλίας. Να αναφερθή ότι η διακοπή λειτουργίας της αντλίας πραγματοποιείται όταν η στάθμη του ύδατος λάβη την τιμήν του *85.0%* του ύψους της δεξαμενής.

Λύσις

α) Η ογκομετρική αύξησις του ύδατος με τον χρόνον εντός της δεξαμενής είναι,

$$\frac{\delta V}{\delta t} = 4.5 - 3.8 = 0.7\ m^3 / s$$

Αλλ΄ αύξησις του βάθους του ύδατος εντός της δεξαμενής κατά δh συνεπάγεται αύξησιν του όγκου του ύδατος κατά $A\delta h$. Ως εκ τούτου κατά την χρονικήν περίοδον δt,

$$\frac{\delta V}{\delta t} = A\frac{\delta h}{\delta t}$$

άρα,

$$u = \frac{\delta h}{\delta t} = \frac{1}{A}\frac{\delta V}{\delta t} = \frac{1}{8.0\ 15.0} 0.7 = 0.00583\ m / s$$

β) Το *85.0%* του ύψους της δεξαμενής ισούται προς *0.85x12.0=10.2 m.* Το χρονικόν διάστημα το οποίον απαιτείται πριν διακοπή η λειτουργία της αντλίας υπολογίζεται εκ της ταχύτητος ανυψώσεως της στάθμης της δεξαμενής *0.00583 m/s* και εκ του διαστήματος μεταξύ των *7.2 m* και *10.2 m* ήτοι *3.0 m.* Άρα, ο χρόνος είναι *3.0/0.00583=514.58 s.*

2.2 Διατήρησις της ορμής

2.2.1 Εξίσωσις της γραμμικής ορμής κατά την μονοδιάστατον ροήν

Ας θεωρηθή επίσης το Σχήμα 2.1 και ας εφαρμοσθή ο ***δεύτερος νόμος κινήσεως κατά Newton***. Κατά τον νόμον τούτον, ως γνωστόν, η αναπτυσσομένη δύναμις *F* επί σώματος ρευστού ισούται προς την ***μεταβολήν της ορμής*** *mu (kgm/s)* εις τον χρόνον. Είναι,

$$F = \frac{d(mu)}{dt} \tag{2.15}$$

Κατά το χρονικόν διάστημα δt η ***ορμή*** του ρευστού εις την θέσιν 1 ισούται προς $\delta m_1 u_1 = \rho\ \delta Q_1\ \delta t\ u_1$ εις δε την θέσιν 2 ισούται προς $\rho \delta Q_2\ \delta t\ u_2$. Λόγω της διατηρήσεως της εξισώσεως της συνεχείας είναι $\delta Q_1 = \delta Q_2$. Επομένως, η στοιχειώδης δύναμις δF η οποία απαιτείται διά να συντηρήση την μεταβολήν της ορμής μεταξύ των θέσεων *1* και *2* κατά το χρονικόν διάστημα δt είναι,

$$\delta F = \frac{\rho \delta Q \delta t\, u_2 - \rho \delta Q \delta t\, u_1}{\delta t} = \rho \delta Q(u_2 - u_1) \tag{2.16}$$

Δι΄ ολοκληρώσεως ως προς δοθείσαν περιοχήν και με την παραδοχήν ότι η ταχύτης επί των διατομών *1* και *2* είναι ομοιόμορφος, η προκύπτουσα δύναμις είναι,

$$F = \rho Q(U_2 - U_1) \tag{2.17}$$

και εις όρους ροής μάζης,

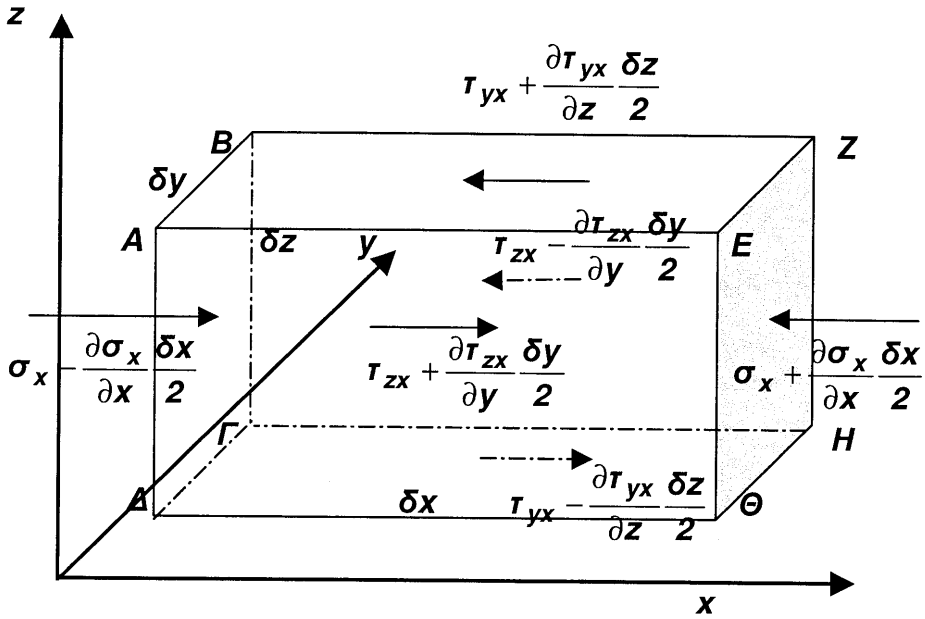
$$F = \dot{m}(U_2 - U_1) \tag{2.18}$$

Η δύναμις F λόγω μεταβολής της ορμής δύναται να θεωρηθή ως το άθροισμα όλων των εξωτερικών δυνάμεων αἱ οποίαι δρουν επί του όγκου ελέγχου και δύναται να περικλείουν τας δυνάμεις λόγω διαφορών πιέσεων F_P και τας δυνάμεις F_R λόγω αντιδράσεως της υδραυλικής κατασκευής, ήτοι $F = \Sigma(F_P + F_R)$. Περαιτέρω ανάλυσις των ανωτέρω δυνάμεων δίδεται εις τα λυμένα παραδείγματα, ιδέ Παράγραφον 2.2.3.

2.2.2 Διαφορική μορφή της εξισώσεως της γραμμικής ορμής

Ας θεωρηθή ο στοιχειώδης όγκος ελέγχου του Σχήματος 2.4. Κατά την x-κατεύθυνσιν και επί του κέντρου του όγκου ελέγχου αι τάσεις είναι: σ_x, *(κάθετος)* τ_{yx} *(διατμητική)*, τ_{zx} *(διατμητική)*. Προς γενίκευσιν, αι κάθεται τάσεις σ_x, σ_y, και σ_z δεν θεωρούνται ότι είναι ίσαι προς την πίεσιν p. Διά τας παρακάτω θεωρήσεις ισχύει ότι,

$$p = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \tag{2.19}$$



Σχήμα 2.4 ***Ροή διά στοιχειώδους όγκου ελέγχου. Επιφανειακαί τάσεις***

Η δύναμις ήτις εξασκείται επί της επιφανείας *ΑΒΓΔ* κατά την x-κατεύθυνσιν ισούται προς το γινόμενον της καθέτου τάσεως $\sigma_x - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\frac{\delta x}{2}$ επί το εμβαδόν της στοιχειώδους επιφανείας *ΑΒΓΔ(=δyδz)*. Ομοίως η δύναμις ήτις εξασκείται επί της απέναντι

κειμένης πλευράς *ΕΖΗΘ* ισούται προς το γινόμενον της καθέτου τάσεως $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\frac{\delta x}{2}$ επί το εμβαδόν της στοιχειώδους επιφανείας *δyδz.* Ούτως, η καθαρά δύναμις επί των δύο επιφανειών κατά την *x*-κατεύθυνσιν ισούται προς $-\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\delta x\delta y\delta z$. Παρόμοιαι εκφράσεις, επίσης κατά την *x*-κατεύθυνσιν, δύναται να αποδειχθούν διά τας διατμητικάς τάσεις τ_{yx}, τ_{zx} επενεργουσών επί των καθέτων πλευρών του όγκου ελέγχου *ΑΒΖΕ* και *ΑΕΘΔ,* αντιστοίχως. Εάν πέραν των ανωτέρω δυνάμεων θεωρηθούν και αι δυνάμεις του σώματος του ρευστού π.χ. ***βαρύτητος ρXδxδyδz***, ένθα *X(m/s²)* η ***δύναμις ανά μονάδαν μάζης του ρευστού***, τότε η ολική δύναμις ήτις δρά επί του όγκου ελέγχου κατά την *x*-κατεύθυνσιν είναι,

$$F_x = (\rho X + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x})\delta x\delta y\delta z \qquad \textbf{(2.20)}$$

Η ροή μάζης, ιδέ Σχήμα 2.2, κατά την x-κατεύθυνσιν είναι $\delta \dot{m}_x = \rho u\delta y\delta z$ και αι ορμαί κατά τας x, *y και z* κατευθύνσεις είναι *(ρuδyδz)u, (ρuδyδz)v,και (ρuδyδz)w,* αντιστοίχως. Αι προηγουμένως αναφερθείσαι δυνάμεις αφορούν το κέντρο του όγκου ελέγχου. Εάν θεωρηθούν αι δυνάμεις κατά την x-κατεύθυνσιν, τότε επί της *ΑΒΓΔ* η δύναμις είναι $(\rho u^2 + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x}\frac{\delta x}{2})\delta y\delta z$ και επί της αντιθέτως κειμένης επιφανείας *ΕΖΗΘ* είναι $(\rho u^2 - \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x}\frac{\delta x}{2})\delta y\delta z$, ούτως η καθαρά δύναμις εντός του όγκου ελέγχου κατά την *x*-κατεύθυνσιν είναι, $\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x}\delta x\delta y\delta z$. Εάν γίνη η άθροισις των δυνάμεων δι΄ όλας τας πλευράς του όγκου ελέγχου και μόνον κατά την x-κατεύθυνσιν είναι, $[\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z}]\delta x\delta y\delta z$.

Επειδή η μεταβολή της ορμής εντός του όγκου ελέγχου είναι $\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}\delta x\delta y\delta z$, τότε η γενική εξίσωσις της x-ορμής δι΄ εξισορροπίσεως όλων των επενεργουσών δυνάμεων είναι,

***x*-ορμή**

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho uw)}{\partial z}=\rho X+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}-\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} \tag{2.21}$$

Ανάλογος είναι και η απόδειξις των εξισώσεων διά την y-ορμήν και την z-ορμήν. Ούτως,

***y*-ορμή**

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho wv)}{\partial z}=\rho Y+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}-\frac{\partial\sigma_y}{\partial y} \tag{2.22}$$

***z*-ορμή**

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uw)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho vw)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z}=\rho Z+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}-\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} \tag{2.23}$$

Αι ανωτέρω εξισώσεις αναφέρονται ως ***Navier-Stokes*** εξισώσεις. Προφανώς, διά ***μή-συνεκτικήν ροήν*** αι διατμητικαί τάσεις παραλείπονται και αι εξισώσεις (***Euler***) γράφονται ως,

***x*-ορμή**

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho uw)}{\partial z}=\rho X-\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} \tag{2.24}$$

y-ορμή

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho wv)}{\partial z}=\rho Y-\frac{\partial\sigma_y}{\partial y} \qquad \textbf{(2.25)}$$

z-ορμή

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uw)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho vw)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z}=\rho Z-\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} \qquad \textbf{(2.26)}$$

Επί ακινήτου ρευστού, αι τρεις κάθεται τάσεις σ_x, σ_y και σ_z είναι ίσαι προς την πίεσιν. Κατά την κίνησιν όμως ασυμπιέστου ρευστού αι εκφράσεις των καθέτων τάσεων είναι,

$$\sigma_x=p-2\mu\frac{\partial u}{\partial x},\ \sigma_y=p-2\mu\frac{\partial v}{\partial y},\ \sigma_z=p-2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \qquad \textbf{(2.27)}$$

Κατά την εφαρμογήν αι διαφοραί μεταξύ καθέτων τάσεων και πιέσεων είναι μηδαμιναί και ως εκ τούτου αγνοούνται. Διά Νευτωνικά, ασυμπίεστα ρευστά κατά την στρωτήν ροήν ισχύουν αι κάτωθι εξισώσεις,

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}) \qquad \textbf{(2.28)}$$

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}=\mu(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}) \qquad \textbf{(2.29)}$$

$$\tau_{zx}=\tau_{xz}=\mu(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}) \qquad \textbf{(2.30)}$$

Αντικατάστασις των ανωτέρω εξισώσεων εις τας εξισώσεις (2.21)-(2.23) και με την θεώρησιν της εξισώσεως (2.13) της συνεχείας της μάζης δίδει,

***x*-ορμή**

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+v(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) \qquad \textbf{(2.31)}$$

***y*-ορμή**

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+v(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}) \qquad \textbf{(2.32)}$$

***z*-ορμή**

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+v(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}) \qquad \textbf{(2.33)}$$

Η πίεσις p έχει υπολογισθεί βάσει της εξισώσεως (2.19).

Αι εξισώσεις των ορμών δύνανται να χρησιμοποιηθούν διά τον υπολογισμόν των δυνάμεων αι οποίαι προκαλούνται λόγω μεταβολής των ταχυτήτων. Μεταξύ άλλων δύναται να υπολογισθούν δυνάμεις λόγω εντόνων αλλαγών της γεωμετρίας των αγωγών, δυνάμεις εντός ακροφυσίων και διαχυτών, εντός υδραυλικών μηχανών, επί θυροφραγμάτων κ.ά. Προφανώς, διά την επίλυσιν προβλημάτων του χώρου των τριών διαστάσεων απαιτείται χρήσις ηλεκτρονικών υπολογιστών και σχετική ανάλυσις εκ της προχωρημένης Υπολογιστικής Υδραυλικής Μηχανικής. Χρησιμοποιούνται αι τεχνικαί των πεπερασμένων διαφορών, πεπερασμένων στοιχείων και πεπερασμένων όγκων επί ***δομημένου (structured)*** ή ***μή-δομημένου (unstructured)*** υπολογιστικού δικτύου.

Τέλος, να αναφερθή ότι η ***γωνιακή ορμή*** και η σχετική προς ταύτην ροπή και ισχύς αναλύεται συστηματικώς εις το Κεφάλαιον 8 το περί των αντλιών.

2.2.3 Προβλήματα επί της γραμμικής ορμής

Πρόβλημα 2.3

Ζητείται να υπολογισθή το μέγεθος και η διεύθυνσις των ασκουμένων δυνάμεων επί οριζοντίου αγωγού ο οποίος εμφανίζει στροφήν 90^0, όπως δεικνύεται εις το Σχήμα 2.5. Η διάμετρος του αγωγού είναι *750.0 mm*, η παροχή διά του αγωγού είναι $0.78\ m^3/s$, ενώ η στατική πίεσις ανάντη της στροφής ισούται προς $345000.0\ N/m^2$. Λόγω τοπικών απωλειών φορτίου η πίεσις εις τα κατάντη ισούται προς $324000.0\ N/m^2$.

Λύσις

Ανάλυσις κατά την x-κατεύθυνσιν

Η ασκουμένη δύναμις, ιδέ εξίσωσιν (2.17), λόγω μεταβολής των ταχυτήτων (ορμών) είναι $\rho Q(u_2 - u_1)$ ένθα u η ταχύτης κατά την x-κατεύθυνσιν, ενώ οι δείκτες *1* και *2* δηλούν είσοδον και έξοδον του ρευστού εις τον αγωγόν. Επιπλέον υπάρχει και η δύναμις p_1A_1 ήτις ασκείται επί της εισόδου του αγωγού. Το άθροισμα των δυνάμεων λόγω στατικής πιέσεως F_{Px} $(=p_1A_1)$ και λόγω αντιδράσεως του F_{Rx} αγωγού πρέπει να ισούται προς την δύναμιν F_{Mx} λόγω μεταβολής της ταχύτητος. Επομένως,

$$F_{Mx} = F_{Px} + F_{Rx}$$

ή

$$F_{Rx} = \rho Q(u_2 - u_1) - p_1A_1$$

Η ταχύτης εις την είσοδον είναι,

$$u_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{Q}{\pi D_1^2 / 4} = \frac{0.78}{\pi\ 0.750^2 / 4} = 1.765\ m/s$$

εις δε την έξοδον, $u_2 = 0.0\ m/s$. Δι΄ αντικαταστάσεως των τιμών,

$$F_{Rx} = 1000.0\ \ 0.78(0.0 - 1.765) - 345000.0\,\frac{\pi\, 0.750^2}{4}$$
$$= -153.8\,kN$$

Ανάλυσις κατά την y-κατεύθυνσιν

Η ασκουμένη δύναμις, ιδέ εξίσωσιν (2.17), λόγω μεταβολής των ταχυτήτων (ορμών) είναι, $\rho Q(v_2 - v_1)$, ένθα v η ταχύτης κατά την y-κατεύθυνσιν. Επιπλέον υπάρχει και η δύναμις p_2A_2 ήτις ασκείται επί της εξόδου του αγωγού. Το άθροισμα των δυνάμεων λόγω στατικής πιέσεως F_{Py} $(=-p_2A_2)$ και λόγω αντιδράσεως του F_{Ry} αγωγού πρέπει να ισούται προς την δύναμιν F_{My} λόγω μεταβολής της ταχύτητος. Επομένως,

$$F_{My} = F_{Py} + F_{Ry}$$

ή

$$F_{Ry} = \rho Q(v_2 - v_1) - (-p_2A_2)$$

Η ταχύτης εις την έξοδον v_2 ισούται προς την ταχύτηταν εισόδου $u_1 = 1.765\ m/s$ επειδή ο αγωγός έχει την αυτήν διάμετρον και ισχύει η διατήρησις της μάζης $Q_1=Q_2$. Εις δε την είσοδον,

$$v_1 = 0.0\ m/s$$

Δι΄ αντικαταστάσεως των τιμών,

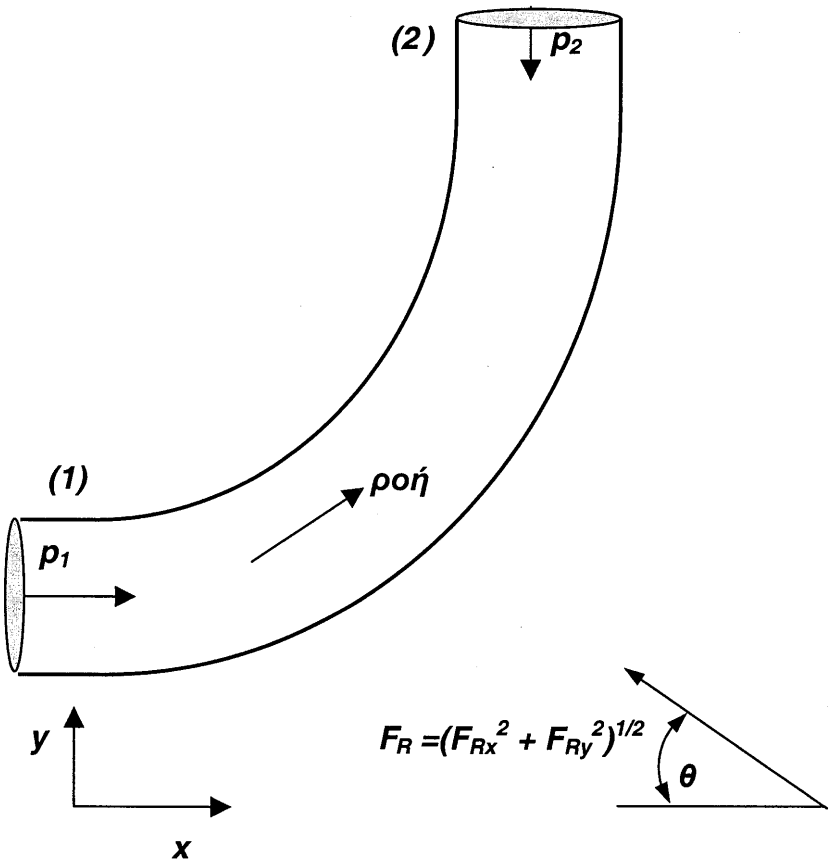
$$F_{Ry} = 1000.0\ \ 0.78(1.765 - 0.0) + 324000.0\,\frac{\pi\, 0.750^2}{4} = 144.5kN$$

Επομένως η συνισταμένη αντίδρασις F_R είναι,

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{153.8^2 + 144.5^2} = 211.0\ kN$$

και

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = -\frac{144.5}{153.8} = -0.939 \quad ή \quad \theta = -43.2^o \ ,$$ ιδέ Σχήμα 2.5.



Σχήμα 2.5 ***Δυνάμεις επί αγωγού εις στροφήν***