Κεφάλαιο 1

Χαρακτηριστικά Μετρητικών Διατάξεων

1.1 Εισαγωγή

Μια μετρητική διάταξη είναι ένα σύστημα που μετατρέπει πληροφορίες εισόδου σε πληροφορίες εξόδου με έναν ορισμένο τρόπο. Σε κάθε τέτοιο σύστημα που λειτουργεί με ορισμένες συνθήκες προσδιορίζεται μία μαθηματική σχέση μεταξύ των εισόδων και των εξόδων του.

Η μαθηματική αυτή σχέση μεταξύ των εισόδων και των εξόδων ενός συστήματος αναφέρεται γενικά σαν συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος. Η συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος μέτρησης μπορεί να προσδιορισθεί είτε θεωρητικά με καθαρά μαθηματικές μεθόδους από την ανάλυση του συστήματος, είτε πειραματικά εάν μελετήσουμε την έξοδο του συστήματος για διάφορες γνωστές εισόδους.

Ο πειραματικός προσδιορισμός της συνάρτησης μεταφοράς αναφέρεται στη βαθμονόμηση του συστήματος. Πάντα όμως τα πειραματικά αποτελέσματα δεν είναι δυνατόν να προσδιορισθούν εκ των προτέρων με απόλυτη μαθηματική ακρίβεια. Αυτό δεν οφείλεται σε εσφαλμένη λειτουργία του συστήματος ή σε σφάλμα του παρατηρητή αλλά οφείλεται στο γεγονός ότι το αποτέλεσμα μίας μέτρησης δεν είναι μία ποσότητα που ορίζεται με απόλυτο μαθηματικό τρόπο αλλά είναι η τιμή μίας μεταβλητής.

Εάν για παράδειγμα ‘μετρήσουμε’ την ίδια ποσότητα εισόδου πολλές φορές με τον ίδιο ακριβώς τρόπο και πάντα με τις ίδιες συνθήκες, δεν θα έχουμε πάντα το ίδιο αποτέλεσμα. Τα διάφορα αποτελέσματα είναι τυχαίες τιμές από το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων. Αντίστροφα κάθε δυνατή τιμή μέτρησης συνοδεύεται από μία πιθανότητα να είναι αποτέλεσμα μέτρησης. Επειδή όμως όλες οι δυνατές τιμές δεν έχουν την ίδια πιθανότητα (τιμές τυχαίας μεταβλητής), η πιθανότητα τους ακολουθεί ορισμένους νόμους μεταβολής.

Για το λόγο αυτό κάθε μέτρηση ανάγεται στον προσδιορισμό της κατανομής μίας ψευδοτυχαίας μεταβλητής. Είναι προφανές ότι τα χαρακτηριστικά της κατανομής αυτής έχουν άμεση σχέση με τις ικανότητες της μετρητικής διάταξης.

Στη συνέχεια θα αναλύσουμε μερικά βασικά χαρακτηριστικά που χρησιμοποιούνται συχνά για να προσδιορίσουν τις ικανότητες μίας μετρητικής διάταξης και αναφέρονται γενικά σαν χαρακτηριστικά (specifications) της μέτρησης, του οργάνου μέτρησης ή της μετρητικής διάταξης. Ο κατάλογος δεν είναι περιοριστικός αλλά αντιπροσωπευτικός. Κάθε ένα από τα χαρακτηριστικά αυτά μπορεί να προσδιορισθεί ή να μετρηθεί και συχνά αποτελούν τα τεχνικά χαρακτηριστικά των μετρητικών διατάξεων.

1.2 Ακρίβεια (Accuracy)

Η ακρίβεια μίας μέτρησης είναι ένα μέτρο της απόκλισης της μετρούμενης τιμής μίας ποσότητας από την τιμή της ποσότητας αυτής. Είναι φανερό ότι η ακρίβεια μίας μέτρησης είναι ένας πολύ σχετικός όρος. Στην περίπτωση των μετρητικών διατάξεων η ακρίβεια (accuracy) ορίζεται σαν η ελάχιστη ποσότητα που διακρίνει μία ανάγνωση της μέτρησης μεταξύ αληθούς και ψευδούς.

Η *'απόλυτη ακρίβεια'*, δηλαδή η μέτρηση με άπειρη ακρίβεια, δεν έχει νόημα στη μέτρηση μίας φυσικής ποσότητας. Πολλοί και διάφοροι είναι οι παράγοντες που επηρεάζουν την ακρίβεια μίας μέτρησης. Άλλοι έχουν σχέση με την λειτουργία του οργάνου (χαρακτηριστικά εισόδου, εξόδου, λειτουργίας....) και άλλοι έχουν σχέση με την χρήση του οργάνου μέτρησης (τροφοδοσία, περιβάλλον λειτουργίας, συνθήκες ανάγνωσης...). Γενικά οι παράγοντες αυτοί αξιολογούνται σαν σφάλματα στην ακριβή μέτρηση. Έτσι στην ακρίβεια μίας μέτρησης επιδρούν τα στατικά σφάλματα, τα δυναμικά σφάλματα, τα σφάλματα απόκλισης και τα σφάλματα γραμμικότητας.

Σε μία εργαστηριακή ή σε μία βιομηχανική μέτρηση, η ακρίβεια επηρεάζεται από την επίδραση των εξωγενών σφαλμάτων, από τα όρια μεταβολής της ένδειξης, από την αστάθεια στον προσδιορισμό του ηλεκτρικού μηδενός, από το περιβάλλον λειτουργίας κ.λπ.

Η ακρίβεια μίας διάταξης προσδιορίζεται με βαθμονόμηση της διάταξης σε συγκεκριμένες συνθήκες λειτουργίας. Αριθμητικά ισούται με το σφάλμα που αναφέρεται στο αποτέλεσμα της μέτρησης το οποίο συχνά συνοδεύει. Προσδιορίζει την μέγιστη δυνατή απόκλιση της πραγματικής τιμής από αυτήν που αναφέρεται στο αποτέλεσμα της μέτρησης και εκφράζεται σαν ορισμένη θετική ή αρνητική απόκλιση ή σαν ποσοστό σε ένα συγκεκριμένο σημείο ή κάποια συγκεκριμένη περιοχή της κλίμακας μέτρησης. Όλες οι μετρητικές διατάξεις και τα όργανα μέτρησης κατατάσσονται σε κατηγόριες ανάλογα με την ακρίβειά τους.

Έστω για παράδειγμα ότι έχουμε ένα ηλεκτρονικό θερμόμετρο. Εάν η ακρίβειά του ορίζεται σαν $\pm 2^{o}C$ σημαίνει ότι η πραγματική τιμή της θερμοκρασίας μπορεί να είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη κατά $2^{o}C$ από την αναφερόμενη σαν θερμοκρασία που μετρήθηκε.

Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι με τον τρόπο αυτό ορίζουμε την απόλυτη ακρίβεια της μέτρησης και υποτίθεται σταθερή για οποιαδήποτε μέτρηση μέσα στα όρια μέτρησης.

Όταν η διάταξη έχει διάφορες κλίμακες, συνήθως η ακρίβεια ορίζεται με απόλυτο τρόπο για κάθε κλίμακα και υποτίθεται ότι είναι η ίδια για όλη την κλίμακα. Εάν για μια δεδομένη κλίμακα το όργανο δεν παρουσιάζει την ίδια ακρίβεια σε όλα τα σημεία της κλίμακας, τότε ορίζεται η σχετική ακρίβεια που εκφράζεται σαν ποσοστό της μετρούμενης τιμής.

Εάν δεν συμβαίνει ούτε αυτό, τότε θεωρούμε σαν απόλυτη ακρίβεια την μέγιστη σχετική και την αντιστοιχούμε σε πλήρη κλίμακα. Η τελευταία αυτή περίπτωση οφείλεται στο ότι συνήθως όλες οι μονάδες του συστήματος μέτρησης ή της μετρητικής διάταξης δεν παρουσιάζουν τα ίδια στατιστικά σφάλματα στο ίδιο σημείο και στον ίδιο χρόνο.

1.2.1 Παράδειγμα

Έστω ότι με ένα όργανο μετράμε θερμοκρασίες μέχρι $500^{o}C$ με σχετική ακρίβεια 1%. Αυτό σημαίνει ότι μία οποιαδήποτε μέτρηση που διαφέρει από την πραγματική θερμοκρασία λιγότερο από $\pm 5^{O}C$ θεωρείται αληθής. Με άλλα λόγια η μέτρηση της θερμοκρασίας είναι $20\pm 5^{O}C$, $100\pm 5^{O}C$, $200\pm 5^{O}C$, $300\pm 5^{O}C$,$400\pm 5^{O}C$.

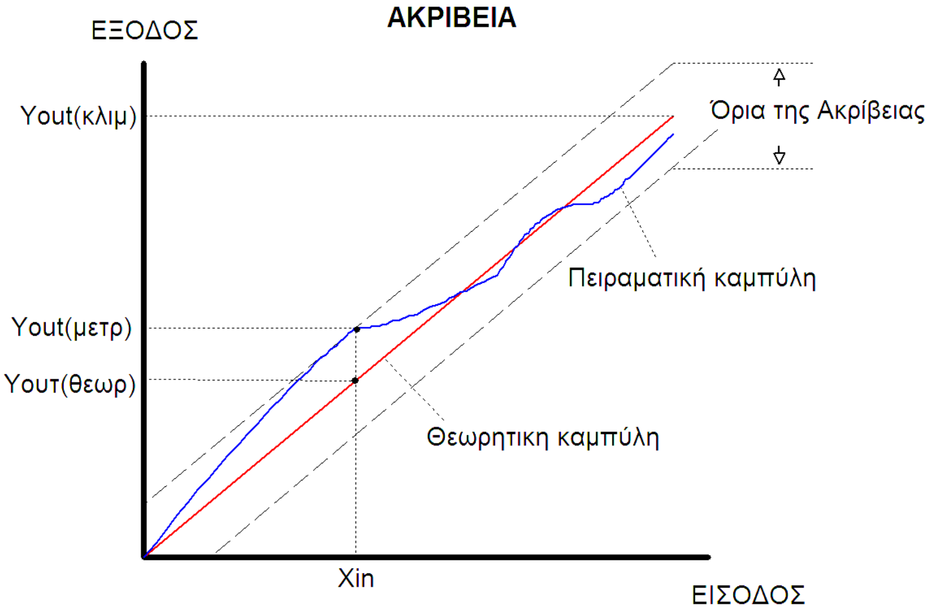
Η έννοια της ακρίβειας φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα όπου παριστάνεται η συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος μέτρησης. Στον οριζόντιο άξονα παριστάνονται οι τιμές της προς μέτρηση ποσότητας (είσοδος) και στον κάθετο άξονα οι τιμές μέτρησης (ανάγνωσης) που δίδονται από το σύστημα (έξοδος). Το τμήμα που βρίσκεται μεταξύ των διακεκομμένων γραμμών, προσδιορίζει τα όρια μέσα στα οποία εάν βρίσκεται μία ανάγνωση θεωρείται αληθής τιμή μέτρησης της ποσότητας που παριστάνεται στην είσοδο.

Το απόλυτο σφάλμα ακρίβειας ισούται με:

$$A(\sigma\varphi) = \left| Yout(\Theta\varepsilon\omega\rho) - Yout(\mu\varepsilon\tau\rho) \right|$$

και το σχετικό σφάλμα ακρίβειας με:

$$A(\sigma\varphi)\% = \frac{A(\sigma\varphi)\max}{Y\kappa\lambda\iota\mu\alpha\kappa\alpha\varsigma(\Theta\varepsilon\omega\rho)} \cdot 100$$



Σχήμα 1.1

Για τον πειραματικό προσδιορισμό της ακρίβειας είναι απαραίτητο να προσδιορίσουμε την ποσότητα εισόδου και με ένα άλλο ακόμη όργανο μέτρησης που έχει καλύτερη ακρίβεια από το υπό έλεγχο όργανο. Συνήθως σαν δεύτερο όργανο χρησιμοποιούμε κάποιο ήδη χαρακτηρισμένο όργανο που θεωρείται σαν πρότυπο. Η τιμή μέτρησης που προσδιορίζει το όργανο αυτό θεωρείται η πραγματική τιμή της ποσότητας εισόδου.

1.2.2 Παράδειγμα

Ελέγχουμε ένα ηλεκτρονικό ωμόμετρο κλίμακας 0-1000Ωμ για σφάλματα ακρίβειας. Στις τρεις πρώτες στήλες του Πίνακα 1 εμφανίζονται τα δεδομένα που έχουμε, δηλαδή, η διακύμανση της αντίστασης ελέγχου Rx(Ω), η θεωρητική διακύμανση της τάσης εξόδου Vout(θεωρ) και η πειραματική διακύμανση της τάσης εξόδου Vout(πειρ). Στην τελευταία στήλη εμφανίζεται η διακύμανση του απόλυτου σφάλματος ακρίβειας Α(σφ).

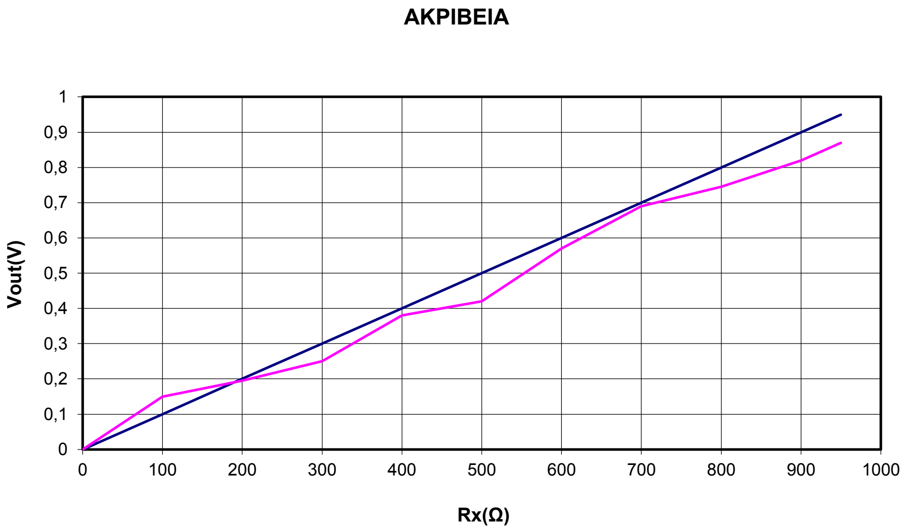
ΠΙΝΑΚΑΣ 1

Rx(Ω)	Vout(V)Θεωρ	Vout(V)Πειρ	Α(σφ)
0	0	0	0
100	0,1	0,15	0,05
200	0,2	0,195	0,005
300	0,3	0,25	0,05
400	0,4	0,38	0,02
500	0,5	0,42	0,08
600	0,6	0,57	0,03
700	0,7	0,69	0,01
800	0,8	0,745	0,055
900	0,9	0,82	0,08
950	0,95	0,87	0,08

Η τιμή του σχετικού σφάλματος ακρίβειας Α(σφ)% για όλη την κλίμακα υπολογίζεται ως:

$$A(\sigma\varphi)\% = \frac{A(\sigma\varphi)\max}{Y\kappa\lambda\iota\mu\alpha\kappa\alpha\varsigma(\Theta\varepsilon\omega\rho)} \cdot 100 = \frac{0,08}{0,95} \cdot 100 \Rightarrow A\left(\sigma\varphi\right)\% = 8.42\%$$

Για γραφική απεικόνιση της ακρίβειας της παραπάνω διάταξης πρέπει να χαράξουμε τις καμπύλες Vout(θεωρ) / Rx και Vout(πειρ) / Rx στους ίδιους άξονες όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.2.



Σχήμα 1.2

Για την εξέλιξη του απόλυτου σφάλματος ακρίβειας χαράζουμε την καμπύλη Α(σφ) / Rx όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.3.

Σχήμα 1.3

Για τον προσδιορισμό των χαρακτηριστικών των οργάνων συχνά χρησιμοποιούνται πρότυπα μεγέθη στην είσοδο με διαπιστευμένες πραγματικές τιμές (callibrate units). Τέτοια μεγέθη χρησιμοποιούνται με διαφορετικό όμως τρόπο, και για την βαθμονόμηση των οργάνων. Τα πρότυπα μεγέθη μπορεί να είναι και τιμές αναφοράς (reference values) οι οποίες προσδιορίζονται με απόλυτο τρόπο από κατάλληλα φυσικά φαινόμενα κατά περίπτωση. Τέτοια ποσότητα για παράδειγμα είναι η θερμοκρασία του πάγου που λιώνει ($0^{O}C$), η τάση κορεσμού μίας διόδου ή η τάση αποκοπής μίας διόδου zener κλπ.

Ένας άλλος τρόπος προσδιορισμού της ακρίβειας ενός ήδη βαθμονομημένου οργάνου είναι να κάνουμε πολλές μετρήσεις της ίδιας ποσότητας εισόδου (θεωρητικά άπειρες, πρακτικά περισσότερες από 30) και να θεωρήσουμε σαν πραγματική τιμή την μέση τιμή των μετρήσεων αυτών. Η όλη διαδικασία πιστοποίησης της ακρίβειας ενός οργάνου ονομάζεται *ΔΙΑΚΡΙΒΩΣΗ*.

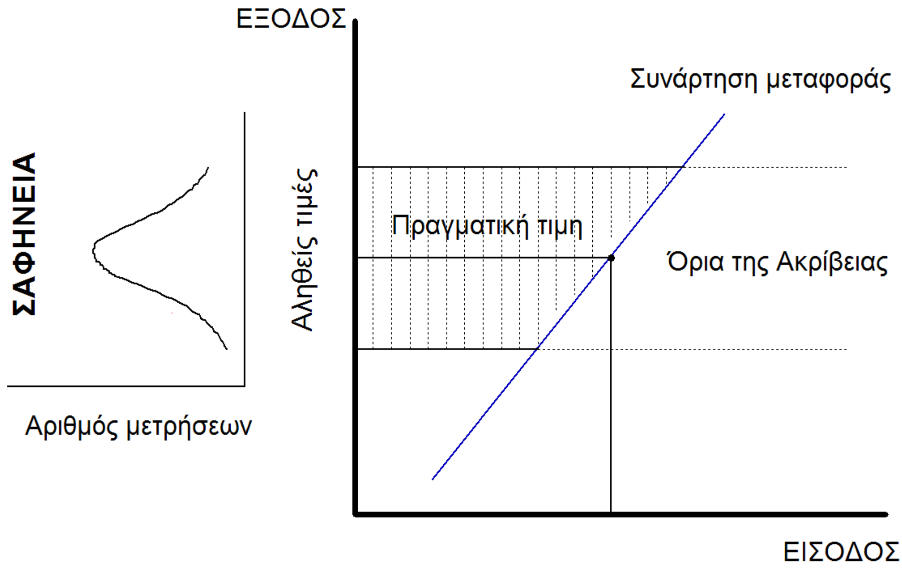
1.3 Σαφήνεια (Precision)

Η σαφήνεια ενός οργάνου μέτρησης ή μιας μετρητικής διάταξης είναι ένα μέτρο της επαναληπτικότητας των αποτελεσμάτων πολλών μετρήσεων της ίδιας ποσότητας που γίνονται με τις ίδιες συνθήκες. Σύμφωνα με τον ορισμό της, η σαφήνεια εκφράζει την κατανομή διαδοχικών μετρήσεων της ίδιας ποσότητας που έγιναν με τις ίδιες συνθήκες και έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά.

Με άλλα λόγια η σαφήνεια εκφράζει την κατανομή των αποτελεσμάτων διαδοχικών μετρήσεων γύρω από τη μέση τιμή τους η οποία θεωρείται και η πραγματική τιμή της μέτρησης. Οι μετρήσεις αναφέρονται στην ίδια ποσότητα εισόδου και γίνονται κάτω από τις ίδιες συνθήκες μέτρησης και με την ίδια πάντα διάταξη.

Πειραματικά προσδιορίζεται από τη μέση τιμή των αποκλίσεων των μεμονωμένων μετρήσεων της ίδιας ποσότητας γύρω από την πραγματική τιμή της μέτρησης. Η πραγματική τιμή της μέτρησης προσδιορίζεται όπως και την περίπτωση προσδιορισμού της ακρίβειας.

Η έννοια της σαφήνειας φαίνεται στο Σχήμα 1.4. Είναι βέβαια φανερό ότι η σαφήνεια δεν έχει απόλυτη σχέση με την ακρίβεια του ίδιου οργάνου.



Σχήμα 1.4

Στο Σχήμα 1.4 παρουσιάζεται ένα τμήμα της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος σε μεγάλη κλίμακα και μελετάται ένα μόνο σημείο εισόδου. Η κατανομή που φαίνεται στο αριστερό μέρος του Σχήματος 1.4 είναι το ιστόγραμμα των διαδοχικών μετρήσεων.

1.4 Διακριτική ικανότητα (Resolution).

Διακριτική ικανότητα ενός συστήματος μέτρησης είναι η ικανότητα να διακρίνει δύο ποσότητες του μεγέθους εισόδου περίπου ίσες μεταξύ τους. Η διάκριση εκφράζεται με διαφορετικά αποτελέσματα στην έξοδο. Σαν διακριτική ικανότητα ενός συστήματος μέτρησης ορίζουμε την ελάχιστη ποσότητα εισόδου κατά την οποία πρέπει να διαφέρουν δύο μετρήσεις του ίδιου μεγέθους ώστε να έχουμε διαφορετικά αποτελέσματα στην έξοδο. Βέβαια η διακριτική ικανότητα μπορεί να ορισθεί και διαφορετικά. Έτσι για παράδειγμα διακριτική ικανότητα είναι η διαφορά ανάμεσα σε δύο τιμές της μετρούμενης ποσότητας στην είσοδο που αντιστοιχούν σε διαδοχικές ελάχιστες αλλαγές στην έξοδο, όταν η είσοδος αλλάζει προς μία κατεύθυνση.

Με άλλα λόγια η διακριτική ικανότητα ενός συστήματος μέτρησης ορίζει την ελάχιστη αλλαγή στην είσοδο που μπορεί να δημιουργήσει αλλαγή στην έξοδο. Είναι προφανές ότι πάντοτε προσδιορίζεται σε μονάδες ή σε ποσοστό ποσότητας του μεγέθους εισόδου ακόμη και όταν αναφέρεται στην έξοδο.

Πολλοί είναι οι λόγοι που μπορούν να επηρεάσουν την διακριτική ικανότητα ενός συστήματος. Συχνά επηρεάζεται από το μέγεθος των τυχαίων σφαλμάτων, την σαφήνεια, την γραμμικότητα κ.λ.π.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι η διακριτική ικανότητα δεν έχει απόλυτη σχέση με την ακρίβεια του οργάνου. Ακρίβεια και διακριτική ικανότητα είναι δύο τελείως διαφορετικές έννοιες. Η ακρίβεια αναφέρεται σε μία μόνο μέτρηση ενώ η διακριτική ικανότητα στη διαφορά ανάμεσα σε δύο διαδοχικές μετρήσεις.

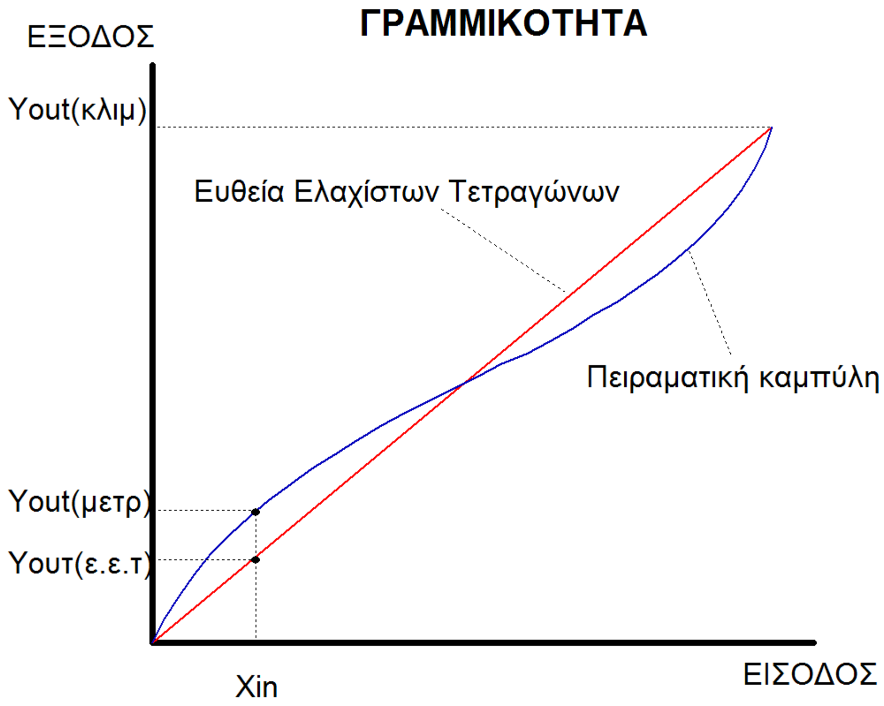
Βέβαια η διακριτική ικανότητα, όπως και η ακρίβεια, είναι δυνατόν να προσδιορισθούν είτε σε απόλυτες μονάδες μέτρησης είτε σε ποσοστό επί της εκατό και να αναφέρονται είτε στην είσοδο είτε στην έξοδο της διάταξης. Και στην περίπτωση της διακριτικής ικανότητας ισχύουν όσα είπαμε και για την ακρίβεια και για την απόλυτη και τη σχετική έκφρασή της. Επειδή όμως η διακριτική ικανότητα είναι δύσκολο να ορισθεί σε κάθε στενή περιοχή της κλίμακας μέτρησης, συνήθως ορίζεται σε όλο το εύρος μέτρησης ή σε όλη την κλίμακα μέτρησης. Η διακριτική ικανότητα δηλαδή ορίζεται συνήθως σε απόλυτη κλίμακα.

1.5 Γραμμικότητα (Linearity)

Οι περισσότεροι μετατροπείς μέτρησης, όλες οι μετρητικές διατάξεις και όλα τα όργανα μέτρησης σχεδιάζονται για να έχουν γραμμική συνάρτηση μεταφοράς. Αυτό σημαίνει ότι η σχέση μεταξύ της εισόδου Χ και της εξόδου Υ του συστήματος είναι μία γραμμική εξίσωση (Υ=αΧ+β) και παριστάνεται στο διάγραμμα εισόδου-εξόδου με μία ευθεία γραμμή με κλίση -β/α και τεταγμένη επί την αρχή β.

Η γραμμικότητα ενός συστήματος μέτρησης αφορά την γραμμικότητα της συνάρτησης μεταφοράς του. Χρησιμεύει για να αναπαράγουμε συμμετρικά την είσοδο του συστήματος από τις τιμές εξόδου του συστήματος (τιμές μέτρησης).

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.5 η είσοδος Χ ενός γραμμικού συστήματος προσδιορίζεται από την έξοδο Υ που μετράται από το σύστημα με την σχέση $X=\alpha Y+\beta$ όπου α και β είναι αριθμητικές παράμετροι του συστήματος. Βέβαια είναι δύσκολο να βρεθεί ή να κατασκευασθεί σύστημα που να έχει γραμμική συνάρτηση μεταφοράς με την απόλυτη μαθηματική έννοια της γραμμικότητας. Άλλωστε αυτό προϋποθέτει και σύστημα μέτρησης με απόλυτη ακρίβεια που είπαμε ότι δεν έχει νόημα και είναι αδύνατο να υπάρξει τέτοιο σύστημα.



Σχήμα 1.5

Στην πράξη θεωρούμε όλα τα συστήματα μέτρησης σαν γραμμικά και προσδιορίζουμε την απόκλιση της πειραματικής καμπύλης από την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων σαν σφάλμα γραμμικότητας.

$$L(\sigma\varphi) = Yout(\pi\varepsilon\iota\rho) - Yout(\varepsilon.\varepsilon.\tau.)$$

Το σφάλμα γραμμικότητας εκφράζεται και σαν ποσοστό της μέγιστης απόκλισης της μετρούμενης τιμής από την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων. Αριθμητικά εκφράζεται σαν επί τοις εκατό σφάλμα γραμμικότητας και αναφέρεται σε πλήρη απόκλιση επί της κλίμακας μέτρησης.

$$L(\sigma\varphi)\% = \frac{L(\sigma\varphi)\max}{Y\kappa\lambda\iota\mu\alpha\kappa\alpha\varsigma(\pi\varepsilon\iota\rho)} \cdot 100$$

Είναι δυνατόν να αγνοήσουμε τα όρια μέτρησης και από τα καθαρά πειραματικά αποτελέσματα να προσδιορίσουμε την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων. Στη συνέχεια προσδιορίζουμε το σφάλμα γραμμικότητας με τον ίδια τρόπο, βασιζόμενοι στην ευθεία αυτή την οποία θεωρούμε την ιδανική συνάρτηση μεταφοράς.

Παράδειγμα

Ελέγχουμε ένα ηλεκτρονικό ωμόμετρο κλίμακας 0-1000Ω για σφάλματα γραμμικότητας. Στις πρώτες δύο στήλες του ΠΙΝΑΚΑ 2 εμφανίζονται οι στήλες της διακύμανσης της αντίστασης ελέγχου Rx(Ω) και της διακύμανσης της τάσης εξόδου Vout(V).

Εάν διαθέτουμε Ν πειραματικά σημεία (*X,Y*) η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων $Y=\alpha X+\beta$ είναι αυτή για την οποία το άθροισμα των (καθέτων) αποστάσεων όλων των σημείων από την ευθεία αυτή είναι μηδέν. Οι συντελεστές α και β της ευθείας αυτής εύκολα υπολογίζονται από τους παρακάτω τύπους.

$$\alpha = \frac{\left(N\sum XY\right)-\left(\sum X\sum Y\right)}{\left(N\sum X^2\right)-\left(\sum X\right)^2}$$

$$\beta = \frac{\left(\sum Y\sum X^2\right)-\left(\sum X\sum XY\right)}{\left(N\sum X^2\right)-\left(\sum X\right)^2}$$

Τα αποτελέσματα των πράξεων (X^2, XY, α, β, και Y=αX+β) εμφανίζονται στις επόμενες 5 στήλες του Πίνακα 2, και στην τελευταία εμφανίζεται η διακύμανση του σφάλματος γραμμικότητας L(σφ) από την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων (ε.ε.τ)

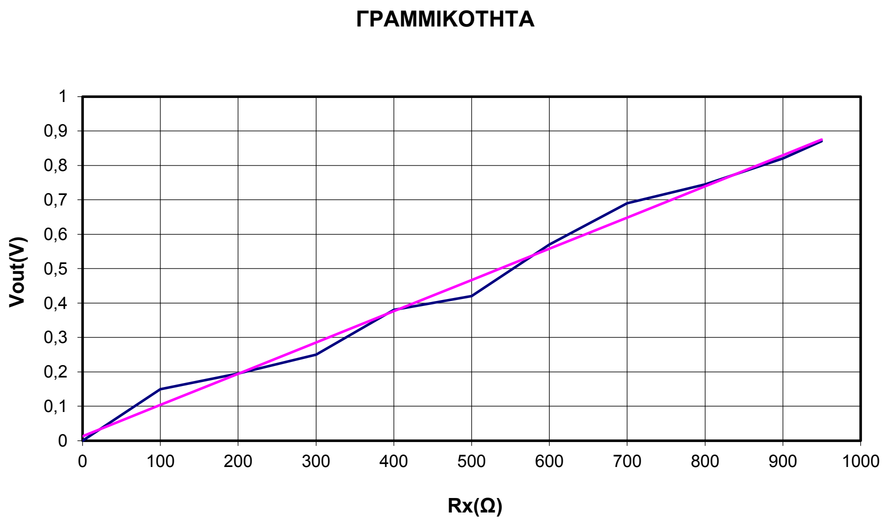
Η τιμή του σχετικού σφάλματος ακρίβειας L(σφ)% για όλη την κλίμακα θα ισούται:

$$\mathrm{L}\left(\sigma\varphi\right)\% = \frac{L(\sigma\varphi)\max}{Y\kappa\lambda\iota\mu\alpha\kappa\alpha\varsigma(\pi\varepsilon\iota\rho)}100 = \frac{0,04685}{0,87}\cdot 100 \Rightarrow L(\sigma\varphi)\% = 5,38\%$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 2

Rx(Ω)	Vout(V)						
X	Y	X^2	XY	α	β	Y=αX+β	L(σφ)
0	0	0	0	0,000907	0,013244	0,013244	-0,01324
100	0,15	10000	15	0,000907	0,013244	0,103965	0,04603
200	0,195	40000	39	0,000907	0,013244	0,194686	0,00031
300	0,25	90000	75	0,000907	0,013244	0,285408	-0,03541
400	0,38	160000	152	0,000907	0,013244	0,376129	0,00387
500	0,42	250000	210	0,000907	0,013244	0,466851	-0,04685
600	0,57	360000	342	0,000907	0,013244	0,557572	0,01242
700	0,69	490000	483	0,000907	0,013244	0,648293	0,04170
800	0,745	640000	596	0,000907	0,013244	0,739015	0,00598
900	0,82	810000	738	0,000907	0,013244	0,829736	-0,00974
950	0,87	902500	826,5	0,000907	0,013244	0,875097	-0,0051
ΣX	ΣY	ΣX^2	ΣXY				
5450	5,09	3752500	3476,5				

Για την γραφική απεικόνιση της γραμμικότητας της παραπάνω διάταξης πρέπει να χαράξουμε τις καμπύλες Vout(V) / Rx(Ω) και Vout(ε.ε.τ.) / Rx στους ίδιους άξονες, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.6.



Σχήμα 1.6

Για την εξέλιξη του σφάλματος γραμμικότητας χαράζουμε την καμπύλη L(σφ)/Rx. όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.7.


ΕΞΕΛΙΞΗ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑΣ
0,06
0,04
0,02
0
-0,02
-0,04
-0,06
L(σφ)
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
Rx(Ω)

Σχήμα 1.7

Κεφάλαιο 2

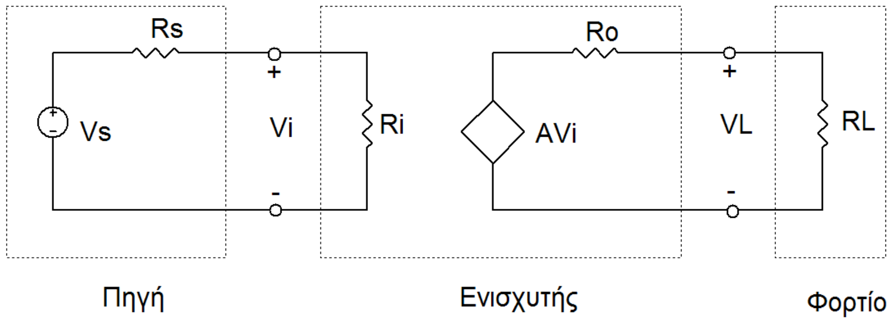
Τελεστικοί Ενισχυτές

2.1 Εισαγωγή

Για τη ανάλυση του μοντέλου ενός ενισχυτή θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Thevenin για να το μετασχηματίσουμε σε πηγή τάσης και αντιστάσεις σειράς.

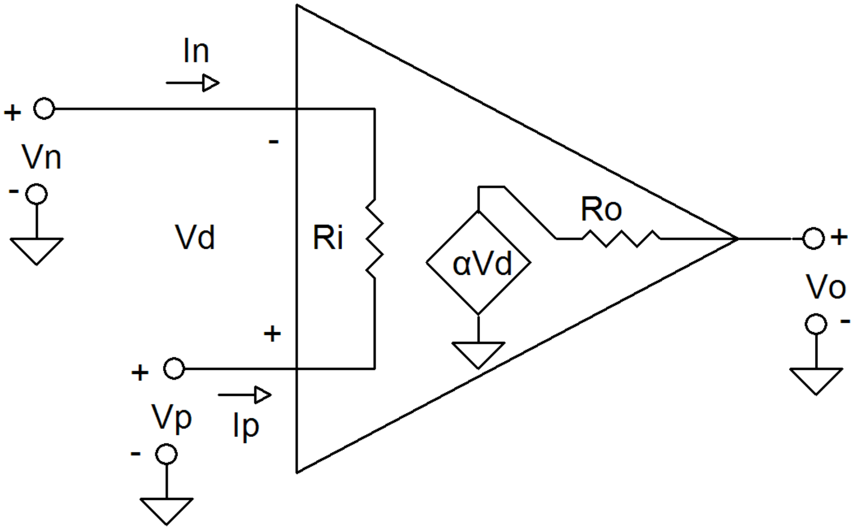
Η είσοδος παίζει έναν παθητικό ρόλο, μη παράγοντας τάση από μόνη της και το ισοδύναμο της κατά Thevenin, είναι ένα ωμικό στοιχείο R_{IN}. Η έξοδος μπορεί να αναπαρασταθεί από μία εξαρτώμενη πηγή τάσης AV_I με αντίσταση εξόδου R_O. Για να συμπληρώσουμε ένα απλό κύκλωμα ενισχυτή, θα συμπεριλάβουμε μία πηγή εισόδου V_S με εσωτερική αντίσταση R_S και μία αντίσταση φορτίου R_L. Το Σχήμα 2.1 δείχνει το ισοδύναμο κατά Thevenin ενός απλού κυκλώματος ενισχυτή.

Μπορείτε να δείτε ότι έχουμε διαιρέτες τάσης και στην είσοδο και στην έξοδο του ενισχυτή και απαιτείται να ξαναυπολογίσουμε το κύκλωμα με κάθε αλλαγή πηγής ή φορτίου.



Σχήμα 2.1

Ο κατά Thevenin ενισχυτής του Σχήματος 2.1, ξανασχεδιάζεται στο Σχήμα 2.2 παίρνοντας τη μορφή ενός πραγματικού κυκλώματος Τ.Ε.

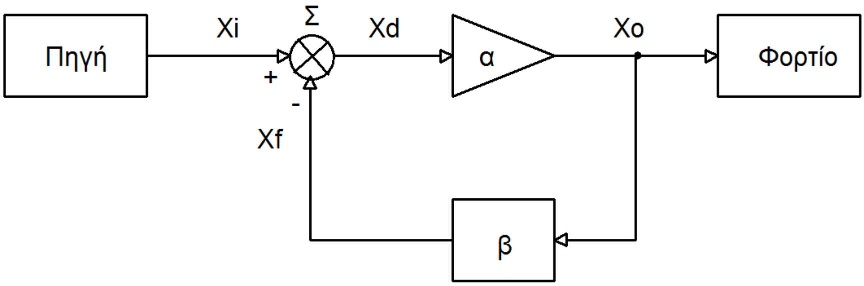


Σχήμα 2.2

Ένας Τ.Ε. είναι ένας διαφορικής εισόδου - απλής εξόδου ενισχυτής τάσης. Ενισχύει την διαφορά τάσης $V_d = V_p - V_n$ στην είσοδο και παράγει μία τάση V_O στην έξοδο με αναφορά στη γη. Έχουμε ακόμα τα φαινόμενα φόρτισης εισόδου και εξόδου όπως είχαν αναφερθεί παραπάνω.

2.2 Αρνητική ανάδραση στους Τ.Ε.

Για να βελτιώσουμε τα χαρακτηριστικά των ενισχυτών χρησιμοποιούμε αρνητική ανάδραση. Το Σχήμα 2.3 δείχνει την βασική δομή ενός ενισχυτή με αρνητική ανάδραση. Τα βέλη δείχνουν την ροή σήματος και το γενικό σύμβολο X είναι το ίδιο και για σήμα τάση και για σήμα ρεύμα. Εκτός από την πηγή και το φορτίο έχουμε άλλα τρία βασικά τμήματα.



Σχήμα 2.3

1. Το τμήμα του ενισχυτή που δέχεται το σήμα X_D και εξάγει το σήμα εξόδου:

$$X_O = aX_D$$

όπου *α* το κέρδος του ενισχυτή που ονομάζεται και ως κέρδος ανοιχτού βρόχου A_{VOL} του κυκλώματος .

2. Ένα δικτύωμα ανάδρασης που δειγματίζει το σήμα εξόδου X_O και παράγει το σήμα ανάδρασης

$$X_F = \beta X_O$$

όπου *β* το κέρδος του δικτυώματος ανάδρασης που ονομάζεται και σαν συντελεστής ανάδρασης του κυκλώματος.

3. Ένας κόμβος άθροισης *Σ* ο οποίος δημιουργεί την διαφορά.

$$X_D = X_{IN} - X_F$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις μπορούμε να υπολογίσουμε τώρα το κέρδος κλειστού βρόχου A_{VCL} του ενισχυτή.

$$A_{VCL} = \frac{X_O}{X_{IN}} = \frac{aX_D}{X_F + X_D} = \frac{aX_D}{\beta X_O + X_D} = \frac{\frac{aX_D}{X_D}}{\frac{\beta X_O + X_D}{X_D}} \Rightarrow A_{VCL} = \frac{a}{1 + a\beta}$$

Σημειώστε για να είναι η ανάδραση αρνητική πρέπει το γινόμενο $a\beta \rangle 0$. Επομένως το A_{VCL} θα είναι μικρότερο από το α. Ο παρονομαστής $(1+a\beta)$ ονομάζεται ποσοστό της ανάδρασης και το γινόμενο $(a\beta)$ κέρδος βρόχου. Σε έναν ιδανικό ενισχυτή αν υποθέσουμε ότι το $a \to \infty$ τότε η εξίσωση γίνεται :

$$A_{VCL(\text{ΙΔΑΝΙΚΟ})} = \frac{\frac{a}{a}}{\beta + \frac{1}{a}} \Rightarrow A_{VCL(\text{ΙΔΑΝΙΚΟ})} = \frac{1}{\beta}$$

και μπορούμε να ξαναγράψουμε την βασική εξίσωση του κέρδους :

$$A_{VCL} = A_{VCL(\text{ΙΔΑΝΙΚΟ})} \frac{1}{1 + \frac{1}{a\beta}}$$

όπου ο συντελεστής $\frac{1}{1 + \frac{1}{a\beta}}$

είναι ο συντελεστής λάθους στην χρησιμοποίηση του μοντέλου του ιδανικού ενισχυτή αντί για το μοντέλο του πραγματικού ενισχυτή.

Η αρνητική ανάδραση μας παρέχει επίσης ένα μέσο για να μειώσουμε την ευαισθησία του κυκλώματος σε διάφορους τύπους διαταραχών. Το Σχήμα 2.4 μας δείχνει τρεις τύπους διαταραχών.

$X_1 \to$ διαταραχή εισερχόμενη στην είσοδο π.χ. μπορεί να αντιπροσωπεύει ανεπιθύμητα σήματα όπως σφάλματα ασυμμετρίας εισόδου και θόρυβος εισόδου.

$X_2 \to$ διαταραχή εισερχόμενη σε κάποια ενδιάμεση βαθμίδα του κυκλώματος όπως π.χ. η κυμάτωση του τροφοδοτικού.

$X_3 \to$ διαταραχή εισερχόμενη στην είσοδο του κυκλώματος όπως π.χ. μεταβολές του φορτίου εξόδου.

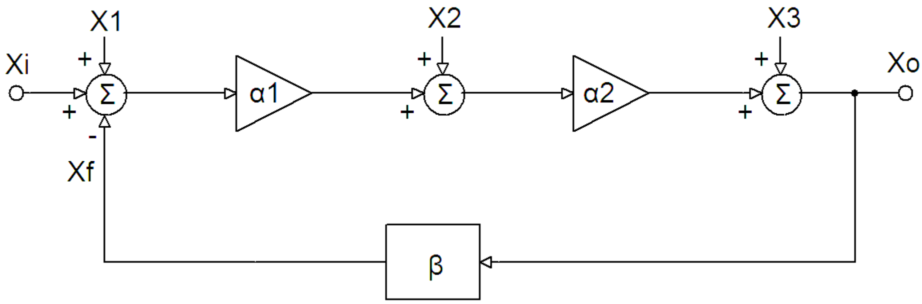
Για να συνδέσουμε την X_2 πρέπει να σπάσουμε τον ενισχυτή σε δύο βαθμίδες με διαφορετικά κέρδη a_1 και a_2. Το ολικό κέρδος τότε θα είναι:

$$a_{(\text{ΟΛΙΚΟ})} = a_1 a_2$$

και η έξοδος θα ισούται με:

$$X_O = X_3 + a_2 \lfloor X_2 + a_1 \left(X_i - bX_O + X_1 \right) \rfloor \Rightarrow$$

$$X_0 = \frac{a_1 a_2}{1 + a_1 a_2 \beta} \left(X_i + X_1 + \frac{X_2}{a_1} + \frac{X_3}{a_1 a_2} \right)$$



Σχήμα 2.4

Όπως παρατηρούμε η αρνητική ανάδραση δεν επιδρά καθόλου σε διαταραχές που εισέρχονται στην είσοδο μαζί με το σήμα εισόδου *Xi* μειώνει κατά πολύ όμως διαταραχές σε ενδιάμεσες βαθμίδες και κατά πολύ περισσότερο διαταραχές στην έξοδο του κυκλώματος.

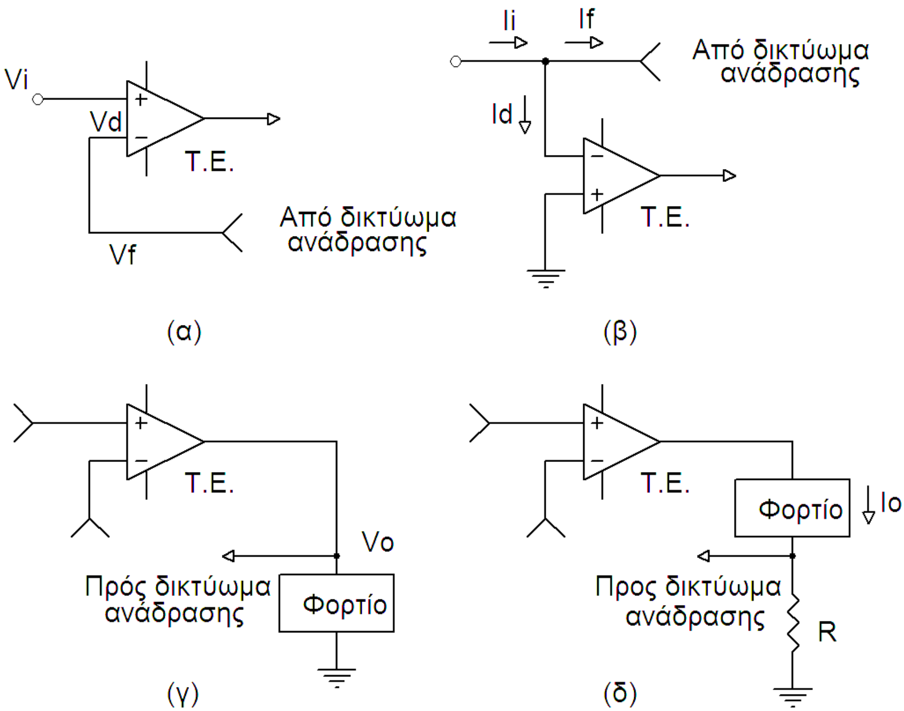
Μπορούμε να συσχετίσουμε τα συμπεράσματα της προηγούμενης παραγράφου με τον Τ.Ε. ο οποίος είναι ένας ολοκληρωμένος ενισχυτής με πολύ μεγάλο κέρδος ανοικτού βρόχου α και ο οποίος είναι σχεδόν αδύνατο να λειτουργήσει σαν ενισχυτής χωρίς αρνητική ανάδραση.

Στο Σχήμα 2.5 φαίνονται οι τέσσερις δυνατοί τρόποι εφαρμογής της αρνητικής ανάδρασης σε έναν Τ.Ε.

Στο Σχήμα 2.5α προσθέτουμε τάσεις καθώς οι τάσεις συνδυάζονται σε σειρά στην είσοδο λέμε ότι εφαρμόζεται ανάδραση σειράς εισόδου.

Στο Σχήμα 2.5β προσθέτουμε ρεύματα και καθώς τα ρεύματα προσθέτονται με παράλληλο τρόπο στην είσοδο λέμε ότι εφαρμόζεται ανάδραση παραλλήλου εισόδου. Σαν κανόνα έχουμε ότι αν το σήμα εισόδου και το σήμα ανάδρασης έρχονται σε διαφορετικούς κόμβους έχουμε ανάδραση σειράς ενώ αν έρχονται στον ίδιο κόμβο έχουμε ανάδραση παραλλήλου.

Στο Σχήμα 2.5γ δειγματίζουμε την τάση εξόδου μια λειτουργία που γίνεται παράλληλα και έτσι έχουμε ανάδραση παραλλήλου εξόδου και στο Σχήμα 2.5δ χρησιμοποιούμε μία αντίσταση σειράς *R* για να δειγματίσουμε το ρεύμα φορτίου και έτσι έχουμε ανάδραση σειράς εξόδου. Σαν κανόνα και εδώ έχουμε, αν ανοίξουμε το φορτίο εξόδου και ακόμα έχουμε ένα σήμα ανάδρασης στην είσοδο τότε έχουμε ανάδραση παραλλήλου ενώ αν βραχυκυκλώσουμε το φορτίο και ακόμη έχουμε σήμα ανάδρασης στην είσοδο έχουμε ανάδραση σειράς.



Σχήμα 2.5

Η ανάδραση μεταβάλλει όχι μόνο το κέρδος και τις παραμορφώσεις αλλά και τις αντιστάσεις εισόδου και εξόδου του κυκλώματος και έτσι η ανάδραση σειράς εισόδου αυξάνει την αντίσταση εισόδου ενώ η ανάδραση παραλλήλου εισόδου την μειώνει.

Η ανάδραση παραλλήλου εξόδου μειώνει την αντίσταση εξόδου ενώ η ανάδραση σειράς εξόδου την αυξάνει. Άρα οι τρόποι ανάδρασης σειράς αυξάνουν τις αντιστάσεις ενώ οι τρόποι ανάδρασης παραλλήλου μειώνουν τις αντιστάσεις όπου εφαρμόζονται.

2.3 Ο ιδανικός Τ.Ε.

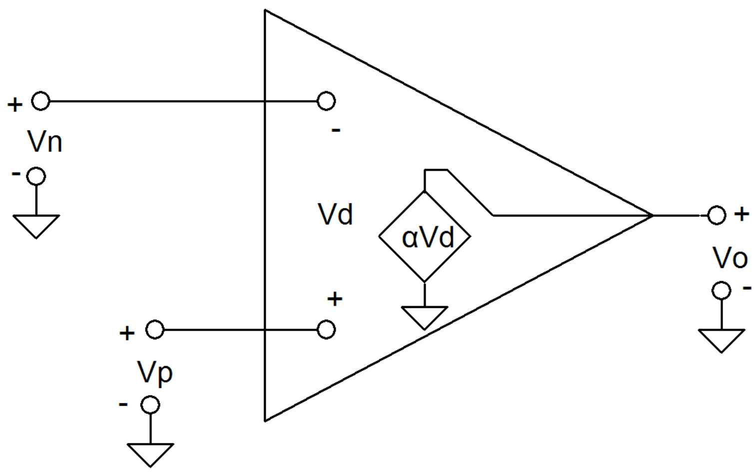
Το μοντέλο του ιδανικού Τ.Ε. έχει ανακαλυφθεί για να απλοποιεί τους υπολογισμούς του κυκλώματος και συχνότατα χρησιμοποιείται από τους μηχανικούς για τους πρώτους υπολογισμούς. Στο μοντέλο του ιδανικού Τ.Ε. γίνονται τρεις βασικές απλοποιήσεις :

1. Το κέρδος ανοικτού βρόχου είναι άπειρο $A_{VOL} = a = \infty$

2. Η αντίσταση εισόδου είναι άπειρη $Z_{IN} = \infty$

3. Η αντίσταση εξόδου είναι μηδέν $Z_O = 0$

Εφαρμόζοντας αυτές τις τρεις απλοποιήσεις στο Σχήμα 2.2 έχουμε το κύκλωμα του ιδανικού Τ.Ε. Σχήμα 2.6.



Σχήμα 2.6

Και άλλες απλοποιήσεις μπορούν να εξαχθούν χρησιμοποιώντας το μοντέλο του ιδανικού Τ.Ε.

Επειδή $R_i = \infty$ θεωρούμε $I_n = I_p = 0$, οπότε δεν υπάρχει φόρτιση στην είσοδο από τα ρεύματα πόλωσης.

Λόγω του ότι $Z_O = 0$ δεν υπάρχει φόρτιση στην έξοδο και η τάση εξόδου ισούται με:

$$V_O = \alpha V_D \text{, } \textit{όπου } V_D = V_p - V_n$$

Καθώς ο Τ.Ε. είναι σε γραμμική λειτουργία, η *Vo* πρέπει να έχει μία πεπερασμένη τιμή τάσης. Από την εξίσωση όμως του ιδανικού Τ.Ε. έχουμε.

$$V_O = V_D \alpha \Rightarrow V_D = \frac{V_O}{\alpha} \textit{ και καθώς } \alpha = \infty \Rightarrow V_D = \frac{V_O}{\infty} \Rightarrow V_D = 0$$

Αυτή είναι η βασική ιδέα της φαινομενικής γείωσης.

Η ιδανική πηγή τάσης οδηγεί την έξοδο εξαρτώμενη μόνο από την διαφορά τάσης μεταξύ των εισόδων. Απορρίπτει έτσι οποιαδήποτε κοινή τάση στην V_p και V_n, οπότε το κέρδος κοινού σήματος $A_{CM} = 0$

Εύρος ζώνης $BW = \infty$

Όριο ταχύτητας μεταβολής εξόδου $SR = \infty$

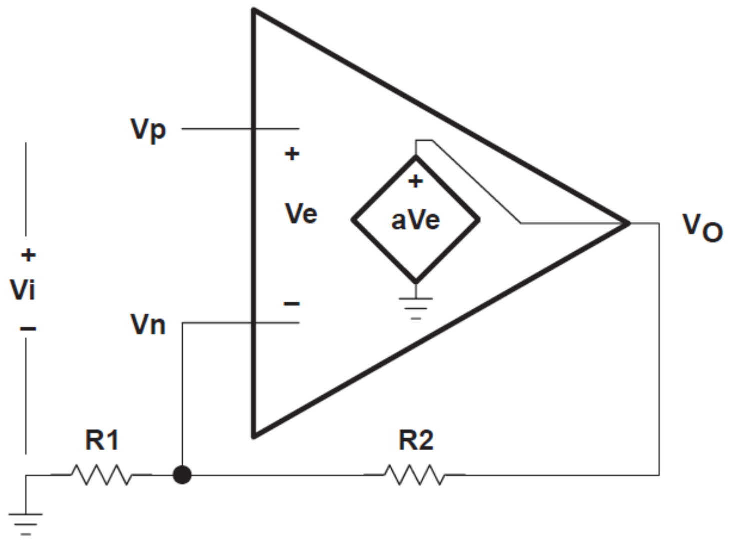
Κανείς περιορισμός συχνότητας δεν υφίσταται.

Ολίσθηση $Drift = 0$

Δεν υπάρχουν μεταβολές στην λειτουργία του Τ.Ε. λόγω θερμοκρασίας, υγρασίας, μεταβολές τάσης τροφοδοσίας, χρόνου κ.λ.π.

2.4 Ιδανικό μοντέλο Τ.Ε. με ανάδραση

Στο Σχήμα 2.7 απεικονίζεται το ιδανικό μοντέλο του Τ.Ε. με αρνητική ανάδραση σε συνδεσμολογία μη αναστρέφοντος ενισχυτή. Σε ένα κύκλωμα Τ.Ε. όταν εφαρμόζεται αρνητική ανάδραση σκοπό έχει να μηδενίζει την τάση του σφάλματος εισόδου (V_D), απ’ όπου και προέρχεται και η ονομασία Τελεστικός Ενισχυτής Ανάδρασης Τάσης.



Σχήμα 2.7. Το ιδανικό μοντέλο Τ.Ε. σε μη αναστρέφουσα συνδεσμολογία

Λαμβάνοντας υπόψη μας τις σχέσεις του ιδανικού ΤΕ $V_O = V_D \alpha$, και V_p=V_n καθώς επίσης και ότι στο Σχήμα 2.7 V_p=V_i, έχουμε:

$$V_i = V_O \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)$$

Αντικαθιστώντας και λύνοντας για απολαβή τάσης $\frac{V_O}{V_i}$ έχουμε:

$$\frac{V_O}{V_i} = \left[\frac{\mathrm{a}}{1 + \mathrm{a}\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \right)} \right] = \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \right) \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\mathrm{a}} \right) \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \right)} \right]$$

Ορίζοντας ως $b = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)$

$$\frac{V_O}{V_i}=\left(\frac{1}{b}\right)\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{ab}\right)}\right]$$

Όπως βλέπουμε από την παραπάνω εξίσωση το κέρδος τάσης τίθεται με λόγο αντιστάσεων και ισούται με:

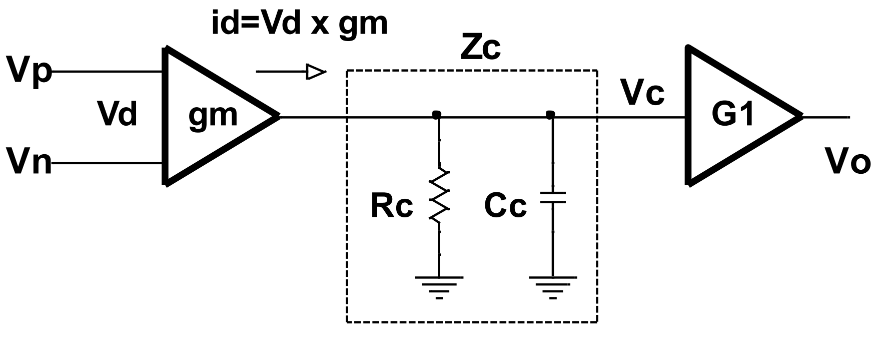
$$\frac{V_O}{V_i}=\frac{1}{b}=\left(\frac{R_1+R_2}{R_1}\right).$$

Ο δεύτερος όρος της εξίσωσης είναι αμελητέος εάν ο όρος ab είναι πολύ μεγάλος (Στον ιδανικό Τ.Ε. a=άπειρο).

Καταλήγουμε όπως βλέπουμε στα ίδια συμπεράσματα με το γενικό μοντέλο ενισχυτή με ανάδραση του Σχήματος 2.4.

2.4.1 Μοντέλο Τ.Ε. εξαρτώμενο από τη συχνότητα

Στα πραγματικά κυκλώματα Τ.Ε., το κέρδος ανοικτού βρόχου a είναι εξαρτώμενο από τη συχνότητα. Για να αναλυθούν οι παράγοντες που επηρεάζουν το εύρος ζώνης (BW) λειτουργίας του ενισχυτή πρέπει να τροποποιηθεί το μοντέλο του ιδανικού Τ.Ε. και να προστεθούν και νέα εξαρτήματα όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.8.



Σχήμα 2.8. Το μοντέλο επίδρασης συχνότητας ενός Τ.Ε.

Η βαθμίδα του διαφορικού ενισχυτή εισόδου αποτελείται είτε από ένα ζευγάρι διπολικών τρανζίστορ, είτε από ένα ζευγάρι FET. Αυτή ονομάζεται και βαθμίδα διαγωγιμότητας (transconductance “gm”) διότι μετατρέπει τη μικρή διαφορική τάση σφάλματος εισόδου Vd, σε ρεύμα id και η συνάρτηση μεταφοράς μετράται σε μονάδες αγωγιμότητας 1/Ω.

Η αντίσταση R_C συμβολίζει την ισοδύναμη DC αντίσταση του Τ.Ε. ως προς τη γείωση και ο πυκνωτής C_C την χωρητικότητα αντιστάθμισης. Για το κύκλωμα του Σχήματος 2. 8 ισχύει:

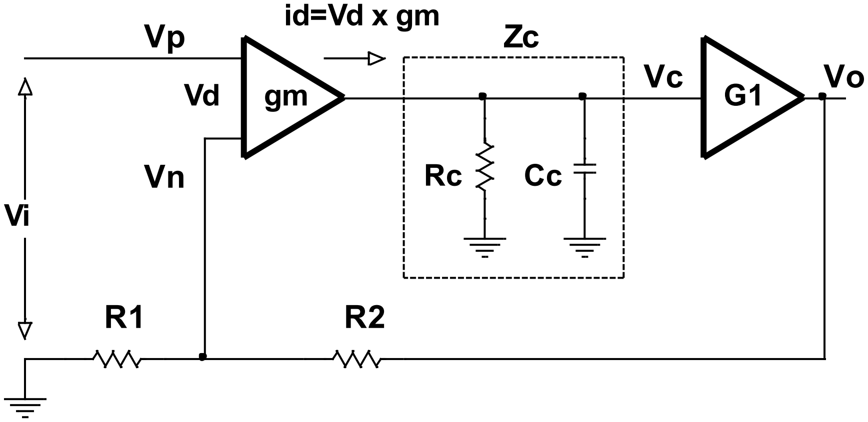
$$V_O = V_C = i_D Z_C = V_D gm \left(\frac{R_C \dfrac{1}{j2\pi f C_C}}{Rc + \dfrac{1}{j2\pi f C_C}} \right) = V_D gm \left(\frac{R_C}{1 + j2\pi f C_C R_C} \right)$$

$$\alpha = A_{VOL} = \frac{V_O}{V_D} = gm \left(\frac{R_C}{1 + j2\pi f C_C R_C} \right)$$

Αυτή η εξίσωση εκφράζει το κέρδος ανοικτού βρόχου του Τ.Ε. A_{VOL} το οποίο είναι εξαρτώμενο από την συχνότητα και μπορεί να συμβολισθεί σαν $A_{VOL}(f)$. Το διάγραμμα Bode ανοικτού βρόχου του Τ.Ε. για την απόκριση του κέρδους στις διάφορες συχνότητες, παρουσιάζει απόκριση DC και σταθερή κλίση -20dB/δεκάδα (ή -6dB ανά οκτάβα). Στο DC και στις χαμηλές συχνότητες $2\pi f C_C R_C \ll 1$ και η απολαβή τάσης ανοικτού βρόχου έχει πολύ υψηλή τιμή $|A_{VOL}| \cong gmR_C$. Αυξάνοντας τη συχνότητα, σε κάποια τιμή $2\pi f C_C R_C = 1$ και $|A_{VOL}| = gm\left(\frac{R_C}{\sqrt{2}}\right)$. Αυτός είναι ο κυρίαρχος πόλος συχνότητας f_D. Για συχνότητες μεγαλύτερες της f_D, η C_C αρχίζει να κυριαρχεί στην απόκριση έτσι ώστε $|A_{VOL}| = \frac{gm}{2\pi f C_C}$ και η κλίση του κέρδους ανοικτού βρόχου να είναι -20dB/δεκάδα.

2.4.2 Ανάδραση σε μοντέλο Τ.Ε. εξαρτώμενο από τη συχνότητα

Εφαρμόζοντας ένα δικτύωμα αρνητικής ανάδρασης στο μοντέλο Τ.Ε. εξαρτώμενο από συχνότητα όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.9 σχηματίζεται ένας μη αναστρέφων ενισχυτής.



Σχήμα 2.9. Το μοντέλο συχνότητας Τ.Ε. σε μη αναστρέφουσα συνδεσμολογία

Λύνουμε τη συνάρτηση μεταφοράς για το κύκλωμα του μη αναστρέφοντα Τ.Ε. σύμφωνα με την προηγούμενη σχέση και έχουμε:

$$A_{VCL}=\frac{V_O}{V_{IN}}=\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{\alpha\beta}}\right)=\left(\frac{R_1+R_2}{R_1}\right)\left[\frac{1}{1+\frac{1}{gm\left(\frac{R_C}{1+j2\pi fC_CR_C}\right)\left(\frac{R_1}{R_1+R_2}\right)}}\right]\Rightarrow$$

$$A_{VCL}=\left(\frac{R_1+R_2}{R_1}\right)\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{gmR_C}\right)\left(\frac{R_1+R_2}{R_1}\right)+\left(\frac{R_1+R_2}{R_1}\right)\left(\frac{j2\pi fC_C}{gm}\right)}\right]$$

Ο όρος $gmRc$ είναι πολύ μεγάλος οπότε ο όρος $\left(\frac{1}{gmR_C}\right)\left(\frac{R_1+R_2}{R_1}\right)\ll 1$ είναι αμελητέος, μπορεί να παραληφθεί και η σχέση της απολαβής κλειστού βρόχου απλοποιείται ως: