# 1 Εξισώσεις Ροής- Υπολογιστική Μηχανική Ρευστών

## 1.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΡΕΥΣΤΩΝ

### 1.1.1 Γενικά θέματα

Η μαθηματική προσομοίωση έχει αναδειχθεί, ιδίως κατά τα τελευταία έτη, ως ένα αυτοδύναμο γνωστικό αντικείμενο που αποδεικνύεται από τον εκπληκτικά μεγάλο αριθμό ειδικευμένων επιστημονικών περιοδικών που εκδίδονται κάθε έτος και του αριθμού των επιστημονικών συνεδρίων. Η Υπολογιστική Μηχανική Ρευστών (Computational Fluid Dynamics, CFD), που είναι μαθηματική προσομοίωση, έχει φθάσει στο επίπεδο του να είναι ένα βασικό εργαλείο όχι μόνο ανάλυσης αλλά και σχεδιασμού σε θέματα:

- Αεροναυπηγικής
- Μηχανολογίας,
- Χημικών Μηχανικών,
- Περιβαλλοντολογικής Μηχανικής,
- Επιστήμης Πολιτικών Μηχανικών,
- Πυρηνικής Μηχανικής και ιδίως
- Εμβιομηχανικής.

# 16 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΡΟΗΣ-ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΡΕΥΣΤΩΝ

Οι Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (ΜΔΕ) των ρευστομηχανικών προβλημάτων που ελέγχουν την ροή είναι μη γραμμικές, ***3D***, ασταθείς, τυρβώδεις και απαιτούν διαθεματικές προσεγγίσεις προς επίλυση. Οι ΜΔΕ κατατάσσονται ως ελλειπτικές, παραβολικές και υπερβολικές ανάλογα του χώρου επιρροής των διαταραχών οι οποίες δημιουργούνται στο χώρο των υπολογισμών.

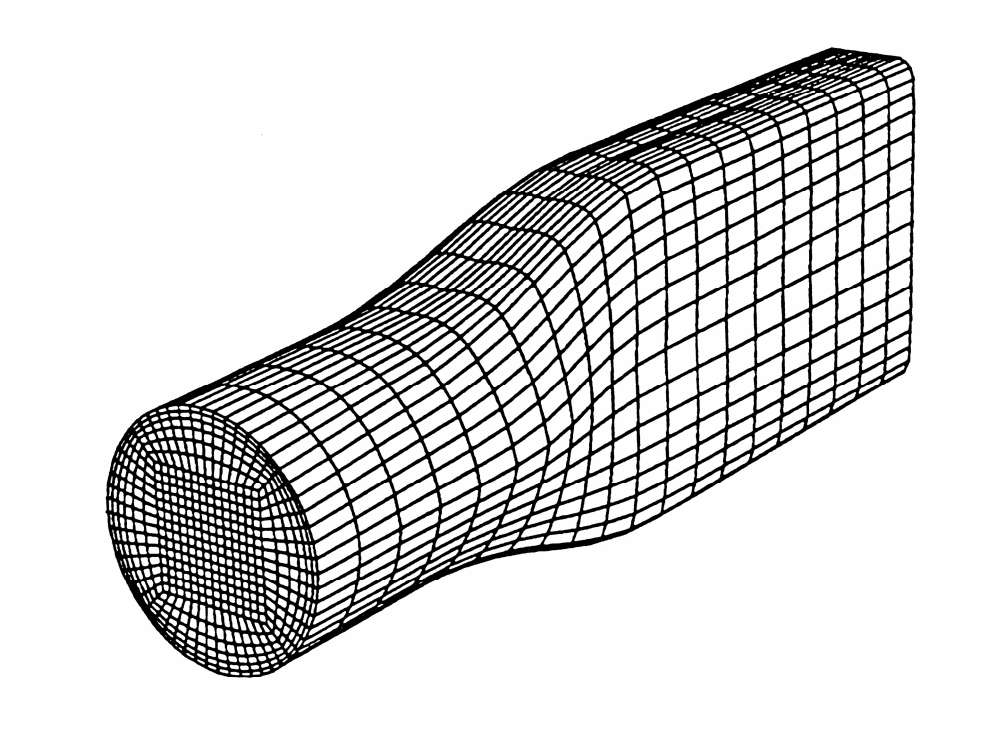
Τα περισσότερα των ***2D*** και ***3D*** εφαρμοσμένων προβλημάτων της Μηχανικής των Ρευστών δεν έχουν αναλυτική λύση, γιατί συνήθως αποτελούνται από μη ομαλές γεωμετρικές επιφάνειες στις οποίες είναι δύσκολο να εφαρμοσθούν οι οριακές συνθήκες. Σε πολλές περιπτώσεις είναι πρόσφορο να χρησιμοποιηθεί αριθμητική μέθοδος προς επίλυση των ΜΔΕ που ελέγχουν την ροή. Με την ανάπτυξη του υψηλής ταχύτητας ηλεκτρονικού υπολογιστή οι αριθμητικές λύσεις αναπτύχθηκαν και επεκτάθηκαν έτσι ώστε να μπορούν να δώσουν λύση σχεδόν σε κάθε παρουσιαζόμενο πρόβλημα άσχετα του κατά πόσο είναι αυτό δύσκολο να επιλυθεί. Αν και οι λύσεις με τις αριθμητικές μεθόδους δίνουν απάντηση σε δεδομένο αριθμό διακριτών σημείων και μόνον σε διακριτά χρονικά διαστήματα, προκειμένου για ασταθείς ροές, αυτό καθ΄ αυτό το γεγονός δεν αποτελεί σοβαρό μειονέκτημα διότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν και διάφορες συναρτήσεις παρεμβολής αλλά και μεγάλος αριθμός υπολογιστικών κόμβων ώστε η ανάδειξη της λύσης να είναι ικανοποιητική.

### 1.1.2 Υπολογιστικά δίκτυα

Η αριθμητική επίλυση οποιουδήποτε προβλήματος Μηχανικής Ρευστών απαιτεί στην αρχή την περιγραφή της γεωμετρίας του προβλήματος και στη συνέχεια την κατασκευή του υπολογιστικού πεδίου το οποίο συντίθεται από πεπερασμένα στοιχεία ή όγκους στους οποίους στηρίζεται η επίλυση. Η κατασκευή τέτοιων δικτύων είναι σημαντική εργασία η οποία πρέπει να εκτελεσθεί πριν την επίλυση του προβλήματος. Στα τελευταία ιδίως χρόνια η ανάπτυξη της επιστήμης της κατασκευής υπολογιστικών δικτύων (grid generation) αποτελεί αυτοτελές γνωστικό αντικείμενο. Ο τρόπος με τον οποίο θα αναγνωσθούν από το πρόγραμμα τα πεπερασμένα στοιχεία ή οι όγκοι είναι θέμα υπολογιστικής ανάλυσης. Υπάρχουν κατά βάση δύο τεχνικές δημιουργίας υπολογιστικών δικτύων: τα δομημένα και τα μη δομημένα δίκτυα.

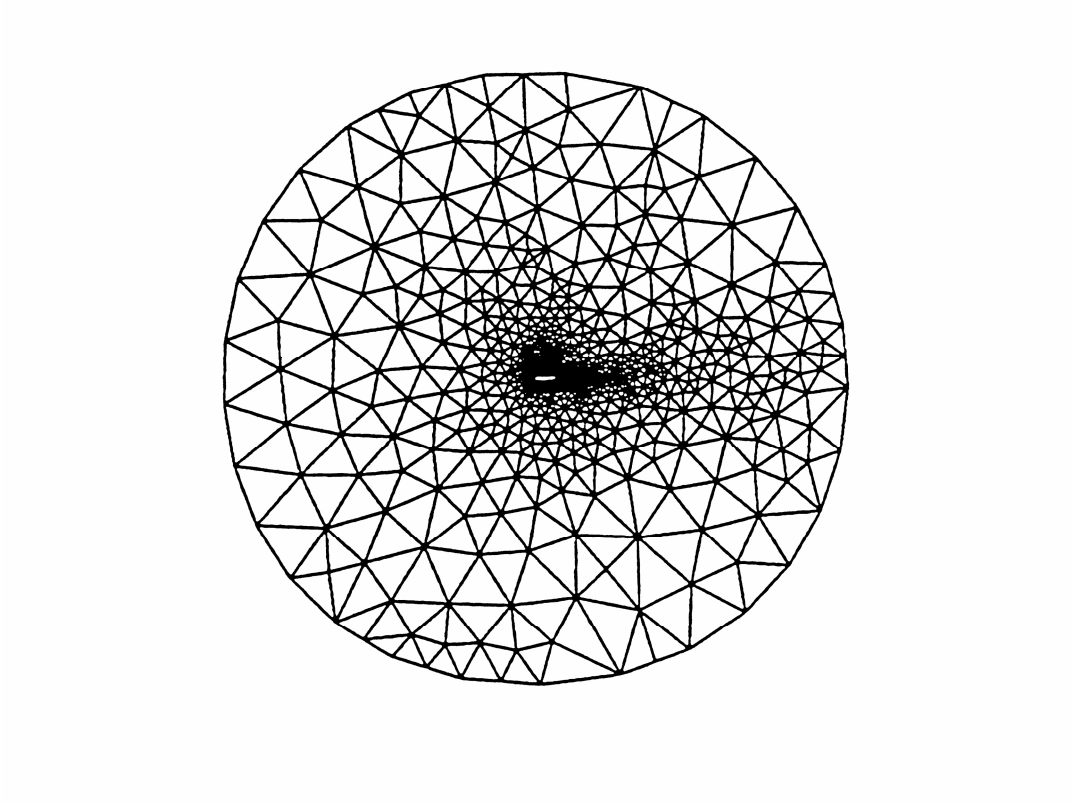
***Τα δομημένα (structured)*** δίκτυα βασίζονται στις καμπυλευμένες συντεταγμένες οι οποίες προσδιορίζονται στα ορία του προβλήματος (body-fitted coordinates). Τα δίκτυα αυτά είναι δυνατό να αποτελούνται από μη ορθογωνικές υπολογιστικές

γραμμές και ο χώρος ροής να αποτελείται από πολλαπλούς χώρους. Η κατανομή των κόμβων είναι δυνατό να είναι μη ομοιόμορφη, Σχήμα 1.1.



*Σχήμα 1.1 Δομημένο υπολογιστικό δίκτυο 3D*

***Τα μη δομημένα (unstructured)*** δίκτυα είναι δυνατό να κατασκευασθούν με τη τοποθέτηση κόμβων σε όλα τα εσωτερικά και εξωτερικά όρια της γεωμετρίας του προβλήματος. Η κατασκευή των πεπερασμένων στοιχείων ή όγκων γίνεται με τη χρήση της τεχνικής τριγωνοποίησης Delaunay, Σχήμα 1.2. Το κύριο πλεονέκτημα της ανάπτυξης και χρήσης μη δομημένων τεχνικών είναι η πιθανή αυτοματοποίηση στη διαδικασία διακριτοποίησης σύνθετων γεωμετρικών προβλημάτων ροής και μετά απ΄ αυτό στη πύκνωση ή αραίωση του δκτύου (grid adaptation) κατά το δοκούν στη διαδικασία επίλυσης.



*Σχήμα 1.2 Μη δομημένο υπολογιστικό δίκτυο 2D*

### 1.1.3 Βασικές θεωρήσεις και απαιτούμενα βήματα για την ανάπτυξη αριθμητικού αλγόριθμου

Κατωτέρω αναφέρονται σύντομα οι βασικές θεωρήσεις αλλά και τα απαιτούμενα βήματα για ανάπτυξη και εφαρμογή αριθμητικής προσομοίωσης προβλημάτων Μηχανικής Ρευστών.

***α) Αναγνώριση του προβλήματος***

- Αναγνώριση του προβλήματος και κατανόηση του μελετητικού ή ερευνητικού προγράμματος,

- καθορισμός των επί μέρους αντικειμενικών σκοπών και αναμενόμενα από την έρευνα αποτελέσματα,
- πλεονεκτήματα και οικονομική θεώρηση ανάπτυξης και χρήσης αριθμητικών προσομοιώσεων,
- σύλληψη και σχεδιασμός των ορίων της προσομοίωσης,
- λήψη δεδομένων και έλεγχος της αξιοπιστίας του αριθμητικού προσομοίωση.

***β) Προσομοίωση του προβλήματος***

- Επιλογή των ανεξάρτητων και εξαρτημένων μεταβλητών του προβλήματος,
- επιλογή του είδους της προσομοίωσης και των σχετικών αριθμητικών προσεγγίσεων,
- καθορισμός των βασικών εξισώσεων, των αρχικών συνθηκών ροής, για ασταθή ροή, και των οριακών συνθηκών,
- παραδοχές του προβλήματος,
- ανάπτυξη των επί μέρους προγραμμάτων για την ολοκλήρωση του προβλήματος.

***γ) Επίλυση του προβλήματος***

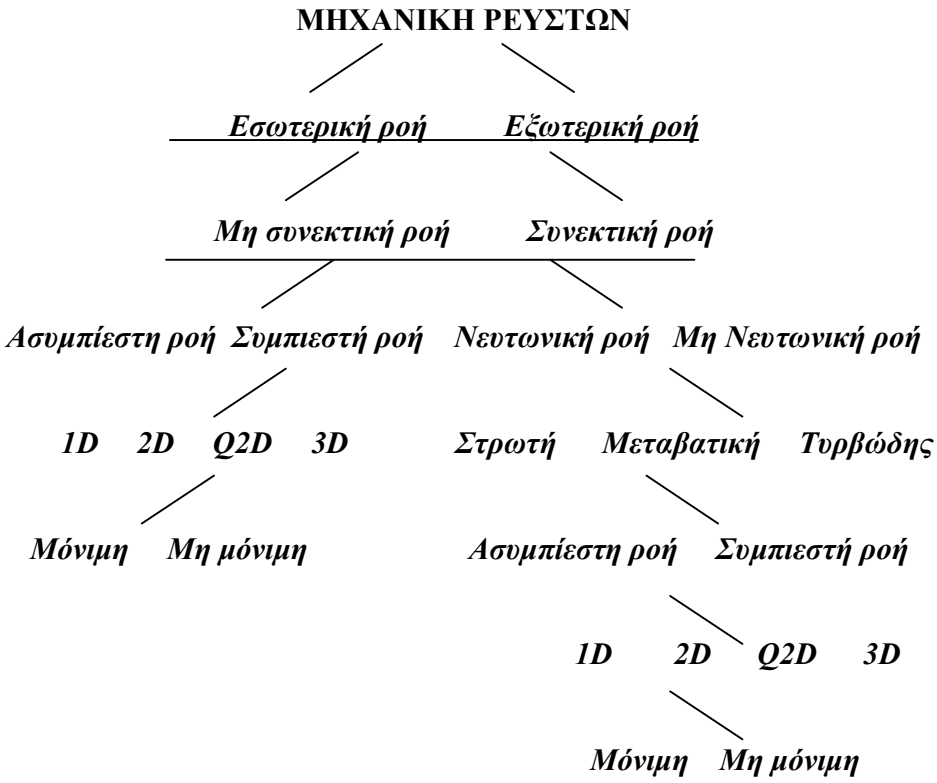
- Επιλογή κατάλληλης τεχνικής επίλυσης ή/και κατάλληλου έτοιμου διαθέσιμου λογισμικού,
- χρήση κατάλληλων υπολογιστικών συστημάτων, desk-top, work-station, κεντρική υπολογιστική μονάδα,
- επαλήθευση των αποτελεσμάτων των υπολογισμών με ακριβείς αναλυτικές λύσεις, εφ΄ όσον αυτές υπάρχουν, ή άλλες αριθμητικές τεχνικές, ή πειραματικά, ή οπτικά αποτελέσματα,
- παρουσίαση των αποτελεσμάτων, ερμηνεία αυτών και προτάσεις για περαιτέρω μελέτη,
- χρήση του αναπτυχθέντος λογισμικού για ανάλυση, σχεδιασμό και λήψη απόφασης για περαιτέρω επιστημονική δράση.

## 1.2 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΡΟΗΣ

Πριν γίνει η ανάπτυξη των βασικών εξισώσεων της ροής, ήτοι της διατήρησης της μάζας, διατήρησης των ορμών και της διατήρησης της ενέργειας, είναι χρήσιμο να αναφερθούν, επιγραμματικά, τα βασικότερα από τα είδη ροής τα οποία ήθελαν να προκύψουν στη πράξη. Η κατηγοριοποίηση αυτή μπορεί να πάρει την πιο κάτω μορφή, Πίνακας 1.1. Για να λυθούν τα προβλήματα της Μηχανικής των Ρευστών απαιτείται η ταυτόχρονη ικανοποίηση και των τριών νόμων της,

- διατήρηση της συνέχειας της μάζας,
- διατήρηση των ορμών,
- διατήρηση της ενέργειας.

Ακολουθεί η ανάπτυξη των εξισώσεων ροής.




*Πίνακας 1.1 Κατηγοριοποίηση Μηχανικής Ρευστών*

### 1.2.1 Συνέχειας της μάζας

***Μονοδιάστατη ροή.*** Στοιχειώδης «ροϊκός σωλήνας» είναι εκείνος ο υποθετικός αγωγός ο οποίος σχηματίζεται από ένα σύνολο εσώκλειστων ροϊκών γραμμών. Επειδή εξ ορισμού δεν υπάρχει ροή κάθετη προς τις ροϊκές γραμμές, το ρευστό πρέπει να εισέλθει εντός του «ροϊκού σωλήνος» και να εξέλθει από αυτό από τα άκρα μέρη του και μόνο. Έστω ότι τα στοιχειώδη εμβαδά των διατομών εισόδου είναι $\delta A_1$ και εξόδου $\delta A_2$, ενώ οι αντίστοιχες στοιχειώδεις ταχύτητες είναι $u_1$ και $u_2$. Είναι προφανές ότι η στοιχειώδης παροχή $\delta Q$, δηλαδή η παρεχόμενη ποσότητα ρευστού $\Delta V$ στη μονάδα χρόνου $\Delta t$, δίνεται,

$$\delta Q = u_1 \delta A_1 = u_2 \delta A_2 \tag{1.1}$$

Μετά την ολοκλήρωση σ΄ όλο τον διαθέσιμο χώρο ροής, η παροχή $Q$ είναι,

$$Q = U_1 A_1 = U_2 A_2 \tag{1.2}$$

όπου $U_1$ και $U_2$ οι μέσες τιμές των ταχυτήτων, ενώ $A_1$ και $A_2$ τα εμβαδά των διατομών στην είσοδο *1* και έξοδο *2*, αντίστοιχα του αγωγού. Η τελική εξίσωση της συνέχειας της μάζας μπορεί να εκφρασθεί ως,

$$Q = UA = \text{σταθερή} \tag{1.3}$$

Η κατωτέρω εξίσωση δίνει τη ποσότητα όγκου $\delta V$ του ρευστού του διερχόμενου μέσω της διατομής $A$ στη μονάδα του χρόνου $\delta t$, δηλαδή την παροχή. Είναι,

$$Q = \frac{\delta V}{\delta t} \tag{1.4}$$

Σε πολλές περιπτώσεις απαιτείται ο υπολογισμός της ροής μάζας $\dot{m} = \delta m / \delta t$. Επειδή $m=\rho V$, τότε για σταθερά πυκνότητα είναι $\delta m=\rho \delta V$ και στη μονάδα του χρόνου, είναι,

$$\dot{m} = \frac{\delta m}{\delta t} = \rho \frac{\delta V}{\delta t} = \rho Q = \rho A U \tag{1.5}$$

Προκειμένου για δύο σημεία 1 και 2 του αγωγού, η ανωτέρω εξίσωση δίνει ,

$$\rho_1 U_1 A_1 = \rho_2 U_1 A_2 \tag{1.6}$$

όπου $\rho_1$ και $\rho_2$ οι πυκνότητες του ρευστού στις αντίστοιχες θέσεις. Προφανώς για ασυμπίεστη ροή, όπου δηλ. $\rho_1 = \rho_2$ , ισχύει η Εξ.1.2. Όλες οι ανωτέρω περιπτώσεις αφορούν σταθερή ροή.

Στη περίπτωση ασταθούς ροής και μέσα στον όγκο ελέγχου του περικλειόμενου μεταξύ των διατομών ***1*** και ***2***, η διαφορά της εισερχόμενης $\rho_1 U_1 A_1$ από την εξερχόμενη μάζα $\rho_2 U_2 A_2$ είναι ίση με τη μεταβολή της μάζας κατά το χρονικό διάστημα $\delta t$. Για $\delta t \to 0$ είναι,

$$\frac{dm}{dt} = \rho_1 U_1 A_1 - \rho_2 U_2 A_2 \tag{1.7}$$

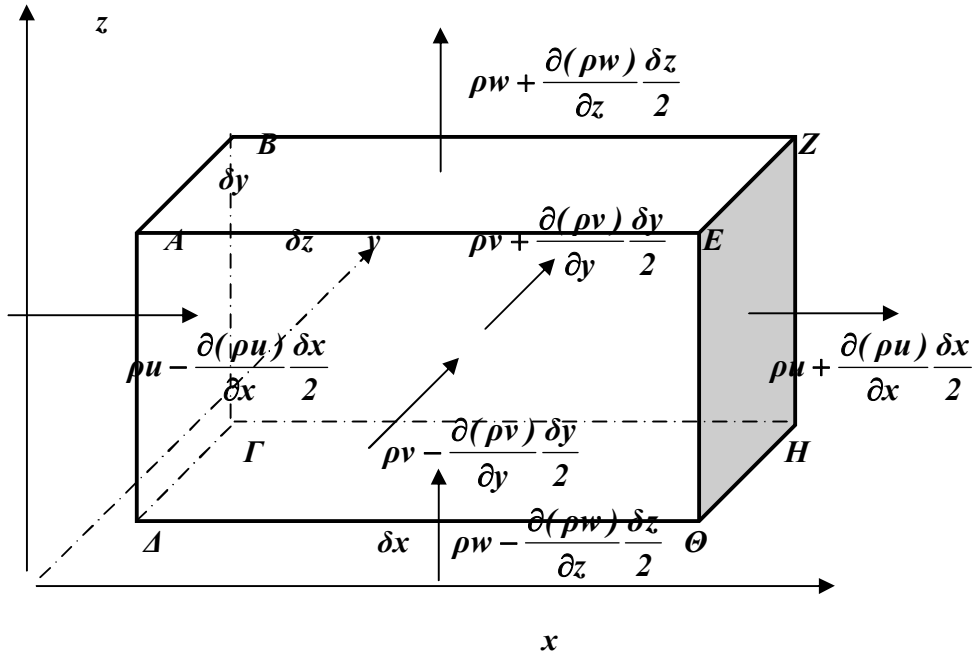
***Διαφορική μορφή της εξίσωσης της συνέχειας της μάζας.*** Ας θεωρηθεί ο στοιχειώδης όγκος ελέγχου του Σχήματος 1.3. Στο κέντρο αυτού η πυκνότητα του ρευστού είναι $\rho$ και οι συνιστώσες της ταχύτητας, οι παράλληλες προς τους άξονες $x,y,z$, είναι $u$, $v$ και $w$, αντίστοιχα. Η ροή μάζας $\delta \dot{m}_{ABΓΔ}$ στην επιφάνεια ***ΑΒΓΔ,*** η οποία είναι κάθετη προς τη $u$ συνιστώσα, είναι,

$$\delta \dot{m}_{ABΓΔ} = \left[ \rho u - \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z \tag{1.8}$$

Όμοια, η εξερχόμενη ροή μάζας από την επιφάνεια $EZHΘ$ είναι,

$$\delta\dot{m}_{EZH\Theta} = [\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{\delta x}{2}]\delta y\delta z \tag{1.9}$$

επομένως, η καθαρή εισροή μέσω των ανωτέρω δύο επιφανειών των καθέτων προς τον άξονα των $x$ είναι,




*Σχήμα 1.3 Ροή μάζας μέσω στοιχειώδους όγκου ελέγχου*

$$\delta\dot{m}_x = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\delta x\delta y\delta z \tag{1.10}$$

Παρόμοιες εκφράσεις μπορούν να γραφούν με τη καθαρή ροή μέσω των υπολοίπων ζευγών των επιφανειών. Έτσι, η ολικά καθαρή εισροή μέσα στον όγκο ελέγχου θα είναι, $\delta\dot{m} = \delta\dot{m}_x + \delta\dot{m}_y + \delta\dot{m}_z$. Από τα πιο πάνω,

$$\delta\dot{m} = -\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right]\delta x\delta y\delta z \qquad (1.11)$$

Η αύξηση της ροής της μάζας στον όγκο ελέγχου είναι,

$$\delta\dot{m} = \frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial(\rho\delta x\delta y\delta z)}{\partial t} \qquad (1.12)$$

Με εξίσωση των Εξ. 1.11 και 1.12, είναι,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \qquad (1.13)$$

Η ανωτέρω εξίσωση είναι η διαφορική μορφή της εξίσωσης της διατήρησης της μάζας και ισχύει για όλα τα ρευστά. Προφανώς, για ασυμπίεστα ρευστά η πυκνότητα είναι σταθερή, άρα,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (1.14)$$

### 1.2.2 Διατήρηση της ορμής

***Γραμμική ορμή στη μονοδιάστατη ροή.*** Ας εφαρμοσθεί ο δεύτερος νόμος της κίνησης του Νεύτωνα. Σύμφωνα με τον νόμο αυτό η αναπτυσσόμενη δύναμη $F$ στο σώμα του ρευστού είναι ίση με τη μεταβολή της ορμής $(=mu)$ στο χρόνο. Είναι,

$$F = \frac{d(mu)}{dt} \qquad (1.15)$$

Στο χρονικό διάστημα $\delta t$ η ορμή του ρευστού στη θέση *1* ισούται με $\delta m_1 u_1 = \rho\, \delta Q_1\, \delta t\, u_1$ στη θέση *2* ισούται με $\rho \delta Q_2\, \delta t\, u_2$. Λόγω της διατήρησης της εξίσωσης της συνέχειας είναι $\delta Q_1 = \delta Q_2$. Επομένως, η στοιχειώδης δύναμη $\delta F$ η οποία απαιτείται για να συντηρήσει τη μεταβολή της ορμής μεταξύ των θέσεων *1* και *2* στο χρονικό διάστημα $\delta t$ είναι,

$$\delta F = \frac{\rho\, \delta Q\, \delta t\, u_2 - \rho\, \delta Q\, \delta t\, u_1}{\delta t} = \rho\, \delta Q (u_2 - u_1) \tag{1.16}$$

Με ολοκλήρωση σε δοθείσα περιοχή και με τη παραδοχή ότι η ταχύτητα στις διατομές *1* και *2* είναι ομοιόμορφη, η προκύπτουσα δύναμη είναι,

$$F = \rho Q (U_2 - U_1) \tag{1.17}$$

και σε όρους ροής μάζας,

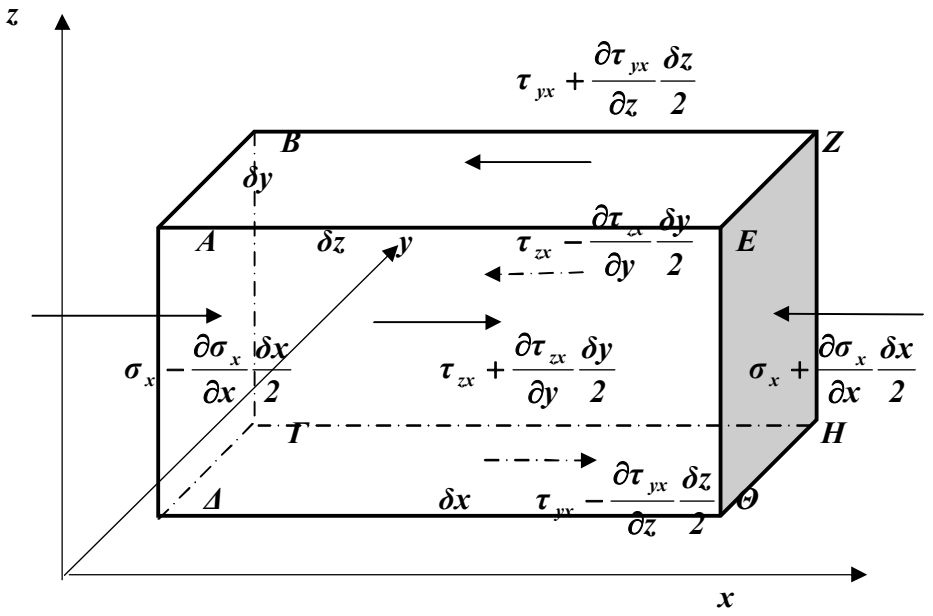
$$F = \dot{m} (U_2 - U_1) \tag{1.18}$$

Η δύναμη $F$ λόγω μεταβολής της ορμής μπορεί να θεωρηθεί ως το άθροισμα όλων των εξωτερικών δυνάμεων οι οποίες δρουν στον όγκο ελέγχου και μπορεί να περικλείσει τις δυνάμεις λόγω διαφορών πιέσεων $F_P$ και τις δυνάμεις $F_R$ λόγω αντίδρασης της ρευστομηχανικής κατασκευής, ήτοι $F = \Sigma (F_P + F_R)$.

***Διαφορική μορφή της εξίσωσης της γραμμικής ορμής.*** Ας θεωρηθεί ο στοιχειώδης όγκος ελέγχου του Σχήματος 1.4. Στη $x$-κατεύθυνση και στο κέντρο του όγκου ελέγχου, οι τάσεις είναι, $\sigma_x$ (κάθετη), $\tau_{yx}$ (διατμητική), $\tau_{zx}$ (διατμητική). Στη γενίκευση, οι κάθετες τάσεις $\sigma_x$, $\sigma_y$, και $\sigma_z$ δεν θεωρούνται ότι είναι ίσες προς την πίεση $p$. Για τις παρακάτω θεωρήσεις ισχύει ότι,

$$p = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \tag{1.19}$$

Η δύναμη η οποία εξασκείται στην επιφάνεια ***ΑΒΓΔ*** στη ***x***-κατεύθυνση είναι ίση με το γινόμενο της κάθετης τάσης $\left(\sigma_x - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)$ επί το εμβαδό της στοιχειώδους επιφάνειας ***ΑΒΓΔ*** (=$\delta y \delta z$). Όμοια, η δύναμη η οποία εξασκείται επί της απέναντι κείμενης πλευράς ***ΕΖΗΘ*** ισούται με το γινόμενο της κάθετης τάσης $\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)$ επί το εμβαδό της στοιχειώδους επιφάνειας $\delta y \delta z$. Έτσι, η καθαρά δύναμη στις δύο επιφάνειες στη ***x***-κατεύθυνση είναι ίση με $\left(-\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\delta x \delta y \delta z\right)$. Παρόμοιες εκφράσεις, επίσης στη ***x***-κατεύθυνση, μπορούν να αποδειχθούν για τις διατμητικές τάσεις $\tau_{yx}, \tau_{zx}$ επενεργούσες στις πλευρές του όγκου ελέγχου ***ΑΒΖΕ*** και ***ΑΕΘΔ***, αντίστοιχα. Εάν πέραν των ανωτέρω δυνάμεων, θεωρηθούν και οι δυνάμεις του σώματος του ρευστού π.χ. βαρύτητας $(\rho X \delta x \delta y \delta z)$, όπου ***X*** η δύναμη ανά μονάδα μάζας του ρευστού, τότε η ολική δύναμη η οποία δρά στον όγκο ελέγχου στη ***x***-κατεύθυνση είναι,




***Σχήμα 1.4 Ροή σε στοιχειώδη όγκο ελέγχου. Επιφανειακές τάσεις***

$$F_x = (\rho X + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x})\delta x\delta y\delta z \qquad (1.20)$$

Η ροή μάζας, Σχήμα 1.3, στη ***x***-κατεύθυνση είναι $\delta \dot{m}_x = \rho u \delta y \delta z$ και οι ορμές στις ***x,y,z*** κατευθύνσεις είναι ***(ρuδyδz)u***, ***(ρuδyδz)v*** και ***(ρuδyδz)w,*** αντίστοιχα. Οι προηγούμενα αναφερθείσες δυνάμεις αφορούν το κέντρο του όγκου ελέγχου. Εάν θεωρηθούν οι δυνάμεις στη ***x***-κατεύθυνση, τότε στην ***ΑΒΓΔ*** η δύναμη είναι $(\rho u^2 + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x}\frac{\delta x}{2})\delta y\delta z$ και στην αντίθετα κείμενη επιφάνεια ***ΕΖΗΘ*** είναι $(\rho u^2 - \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x}\frac{\delta x}{2})\delta y\delta z$, έτσι η καθαρή δύναμη στον όγκο ελέγχου στη ***x***-κατεύθυνση είναι, $\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x}\delta x\delta y\delta z$. Εάν γίνει η άθροιση των δυνάμεων σ΄ όλες τις πλευρές του όγκου ελέγχου και μόνο στη ***x***-κατεύθυνση είναι, $[\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z}]\delta x\delta y\delta z$. Επειδή η μεταβολή της ορμής στον όγκο ελέγχου είναι $\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}\delta x\delta y\delta z$, τότε η γενική εξίσωση της ***x***-ορμής, με την εξισορρόπηση όλων των δυνάμεων που επενεργούν, είναι,

*x-ορμή,*

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} = \rho X + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \qquad (1.21)$$

Ανάλογη είναι και η απόδειξη των εξισώσεων με τη ***y***-ορμή και τη ***z***-ορμή. Έτσι,

*y-ορμή,*

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho wv)}{\partial z} = \rho Y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \qquad (1.22)$$

*z-ορμή,*

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uw)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho vw)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z}=\rho Z+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}-\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \quad (1.23)$$

οι ανωτέρω εξισώσεις αναφέρονται ως Navier-Stokes εξισώσεις. Προφανώς, για μη συνεκτική ροή οι διατμητικές τάσεις παραλείπονται και οι εξισώσεις, ονομάζονται τώρα Euler, γράφονται ως,

*x-ορμή,*

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho uw)}{\partial z}=\rho X-\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \quad (1.24)$$

*y-ορμή,*

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho wv)}{\partial z}=\rho Y-\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \quad (1.25)$$

*z-ορμή,*

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uw)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho vw)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z}=\rho Z-\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \quad (1.26)$$

Σε ακίνητο ρευστό, οι τρεις κάθετες τάσεις $\sigma_x$,$\sigma_y$ και $\sigma_z$ είναι ίσες με την ασκούμενη πίεση. Κατά την κίνηση όμως ασυμπίεστου ρευστού, οι εκφράσεις των καθέτων τάσεων είναι,

$$\sigma_x=p-2\mu\frac{\partial u}{\partial x},\ \ \sigma_y=p-2\mu\frac{\partial v}{\partial y},\ \ \sigma_z=p-2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.27)$$

Στην εφαρμογή, οι διαφορές μεταξύ καθέτων τάσεων και πιέσεων είναι μηδαμινές και έτσι αγνοούνται. Για Νευτωνικά, ασυμπίεστα ρευστά, στη στρωτή ροή, ισχύουν οι εξισώσεις,

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad (1.28)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}) \tag{1.29}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}) \tag{1.30}$$

Αντικατάσταση των ανωτέρω εξισώσεων στις Εξ. 1.21-1.23 και με τη θεώρηση της Εξ.1.13 της συνέχειας της μάζας δίνει ,

*x-ορμή,*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) \tag{1.31}$$

*y-ορμή,*

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}) \tag{1.32}$$

*z-ορμή,*

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}) \tag{1.33}$$

Η πίεση $p$ έχει υπολογισθεί βάσει της Εξ. 1.19.

Με τη προσομοίωση τυρβώδους ροής χρησιμοποιούνται τα ***k-ε, k-ω*** μοντέλα καθώς και **RNG** (ReNormalization Group) ***k-ε*** μοντέλα. Οι εξισώσεις των ορμών μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό των δυνάμεων οι οποίες προκαλούνται λόγω μεταβολής των ταχυτήτων. Μεταξύ άλλων μπορεί να υπολογισθούν δυνάμεις λόγω έντονων αλλαγών της γεωμετρίας των αγωγών, δυνάμεις σε ακροφύσια και διαχύτες, σε υδραυλικές μηχανές, σε θυροφράγματα, σε αγγεία κ.ά. Προφανώς, με τη επίλυση προβλημάτων του χώρου των τριών διαστάσεων απαιτείται χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών. Τέλος, να αναφερθεί ότι η γωνιακή ορμή αφορά περιστρεφόμενα συστήματα (αντλίες, στρόβιλοι, κ.ά.)

### 1.2.3 Διατήρηση της ενέργειας

***Ενέργεια στη μονοδιάστατη ροή.*** Στο Σχήμα 1.5 δείχνεται ένα κυλινδρικό στοιχείο του ροϊκού σωλήνα κατά μήκος μιας ροϊκής γραμμής. Το μήκος και το εμβαδό της διατομής είναι $\delta s$ και $\delta A$, αντίστοιχα. Το βάρος του στοιχείου είναι $\rho g\, \delta s\, \delta A$. Η δύναμη η οποία επενεργεί στο πίσω τμήμα είναι $p\delta A$ ενώ στο μπροστινό τμήμα είναι $[\, p + (\frac{dp}{ds})\delta s\, ]\, \delta A$ όπου $p$ η στατική πίεση. Οι κάθετες δυνάμεις οι οποίες δρουν στα πλευρικά τοιχώματα του στοιχειώδους κυλίνδρου βρίσκονται σε ισορροπία. Το ρευστό θεωρείται ότι είναι ιδεατό ή μη συνεκτικό και κατά συνέπεια οι ασκούμενες διατμητικές δυνάμεις είναι ίσες με μηδέν. Η ταχύτητα μεταβάλλεται κατά μήκος της ροϊκής γραμμής και άρα υπάρχει μία δύναμη επιτάχυνσης η οποία πρέπει να ληφθεί υπ΄ όψη στη εξισορρόπηση των δυνάμεων οι οποίες δρουν κατά μήκος του άξονα της ροής. Θεωρώντας το ίδιο βάρος του στοιχειώδους όγκου, θα είναι,

$$-\rho g \delta s\, \delta A\, \sigma\upsilon\nu\theta + p\delta A - (\, p + \frac{dp}{ds}\delta s\,)\delta A = \frac{\rho g \delta s\, \delta A}{g}\frac{dU}{dt} \qquad (1.34)$$

ή

$$-\rho g \sigma\upsilon\nu\theta - \frac{dp}{ds} = \rho\frac{dU}{dt} \qquad (1.35)$$

Επίσης ισχύει ότι,

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{dz}{ds} \qquad (1.36)$$

όπου $z$ ο κατακόρυφος άξονας, Σχήμα 1.5. Επειδή,

$$U = \frac{ds}{dt} \qquad (1.37)$$

και άρα,

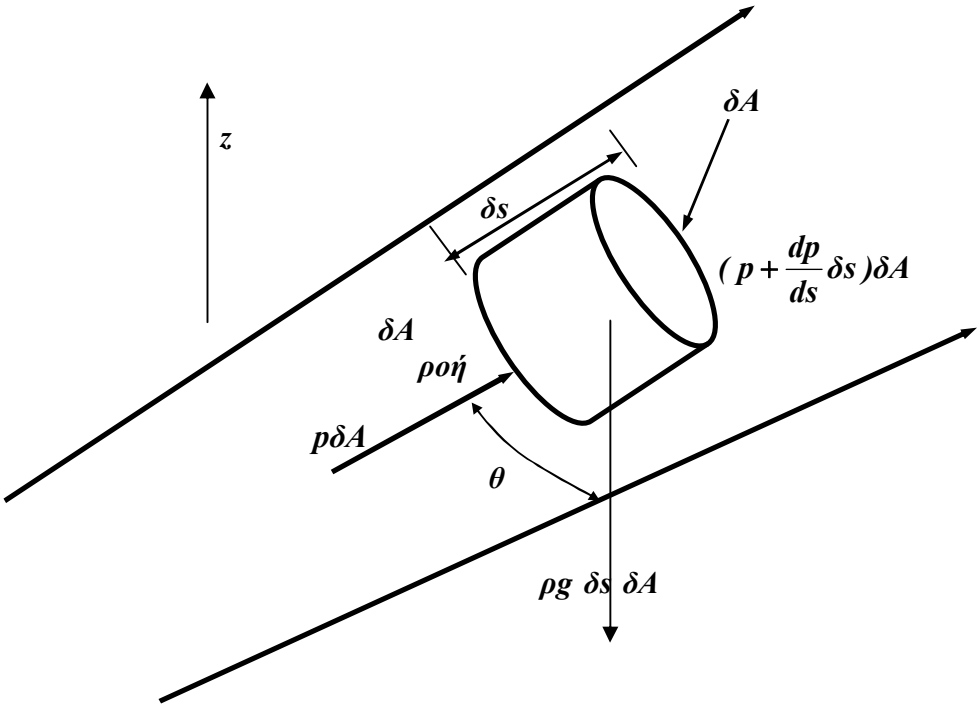
$$\frac{dU}{dt} = U\frac{dU}{ds} \qquad (1.38)$$

Επομένως, η Εξ. 1.35 γράφεται,

$$\frac{d}{ds}\left(z+\frac{p}{\rho g}+\frac{UdU}{g}\right)=0 \tag{1.39}$$

Με ολοκλήρωση κατά μήκος της ροϊκής γραμμής είναι,

$$z+\frac{p}{\rho g}+\frac{U^2}{2g}=\sigma\tau\alpha\theta\epsilon\rho\acute{o}=H \tag{1.40}$$




*Σχήμα 1.5 Εξισορρόπηση δυνάμεων σε ροϊκό κυλινδρικό στοιχείο*

## 32 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΡΟΗΣ-ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΡΕΥΣΤΩΝ

Η ανωτέρω εξίσωση ονομάζεται εξίσωση του Bernoulli και εκφράζει την ενεργειακή (φορτίο) εξισορρόπηση κατά τη ροή του ρευστού. Εάν κάθε όρος της Εξ. 1.40 πολλαπλασιασθεί με το σταθερό ποσό $\rho g Q$ , είναι,

$$(\rho g Q) z + (\rho g Q) \frac{p}{\rho g} + (\rho g Q) \frac{U^2}{2g} = \sigma\tau\alpha\theta\epsilon\rho\acute{o} \qquad (1.41)$$

Κάθε όρος της ανωτέρω εξίσωσης έχει μονάδες ισχύος. Στην Εξ. 1.40 κάθε όρος έχει μονάδες μέτρων και απ΄ αυτό είναι φρόνιμο κάθε όρος να αναφέρεται με την έκφραση ύψος. Ο πρώτος όρος είναι το ύψος λόγω θέσης του ρευστού, ο δεύτερος όρος είναι το ύψος λόγω πίεσης και ο τρίτος όρος το κινητικό ύψος. Το άθροισμα όλων των ανωτέρω όρων δίνει το ολικό ενεργειακό ύψος ή φορτίο $H\ (m)$.

Στην περίπτωση όπου η ροή είναι πραγματική αυτή υφίσταται απώλειες φορτίου, δηλ. ενέργειας, λόγω των αναπτυσσόμενων τριβών της ροής με τα τοιχώματα και με το ίδιο το ρευστό. Οι απώλειες αυτές $h_f$ είναι το άθροισμα των γραμμικών απωλειών $\sum_{i=1}^{i=n} h_{f_i}$ όπου $n$ ο αριθμός των αγωγών και το άθροισμα των τοπικών απωλειών $\sum_{j=1}^{j=m} h_{L_j}$ όπου $m$ ο αριθμός των εμφανιζόμενων τοπικών απωλειών. Μπορεί να τεθεί,

$$h_f = \sum_{i=1}^{i=n} h_{f_i} + \sum_{j=1}^{j=m} h_{L_j} \qquad (1.42)$$

Η ενεργειακή Εξ. 1.40 με μέσες τιμές ταχυτήτων $U_1$ και $U_2$ και βάσει των ανωτέρω γράφεται,

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{U_2^2}{2g} + h_f \qquad (1.43)$$

όπου $\alpha_1$ και $\alpha_2$ οι συντελεστές διόρθωσης του κινητικού ύψους στις αντίστοιχες διατομές και χάρη απλοποίησης παίρνουν τιμή ίση με την μονάδα.

***Διαφορική μορφή της εξίσωσης της ενέργειας.*** Με ανάλογο σκεπτικό, του τρόπου απόδειξης της διαφορικής εξίσωσης της γραμμικής ορμής, μπορεί να

αποδειχθεί η διαφορική μορφή της ενεργειακής εξίσωσης. Σε μια των μορφών της είναι,

$$\frac{\partial[\rho(e+q^2/2)]}{\partial t}+$$
$$\frac{\partial[\rho u(e+q^2/2)]}{\partial x}+\frac{\partial[\rho v(e+q^2/2)]}{\partial y}+\frac{\partial[\rho w(e+q^2/2)]}{\partial z}=$$
$$-\frac{\partial(pu)}{\partial x}-\frac{\partial(pv)}{\partial y}-\frac{\partial(pw)}{\partial z}+\frac{\partial(K\frac{\partial T}{\partial x})}{\partial x}+\frac{\partial(K\frac{\partial T}{\partial y})}{\partial y}+\frac{\partial(K\frac{\partial T}{\partial z})}{\partial z}+$$
$$\frac{\partial(u\tau_{xx}+v\tau_{yx}+w\tau_{zx})}{\partial x}+\frac{\partial(u\tau_{yx}+v\tau_{yy}+w\tau_{zy})}{\partial y}+\frac{\partial(u\tau_{zx}+v\tau_{yz}+w\tau_{zz})}{\partial z}$$

(1.44)

Στη ανωτέρω εξίσωση, $q^2=u^2+v^2+w^2$ , $K$ είναι ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας, $T$ η θερμοκρασία, ενώ η ειδική ενέργεια δίνεται ως $e=c_vT$ με $c_v$ το συντελεστή θερμοχωρητικότητας με σταθερό όγκο.

## 1.3 ΡΟΪΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

### 1.3.1 Ροϊκή γραμμή

Λόγω της πολυπλοκότητας των εξισώσεων οι οποίες ελέγχουν τη ροή των ρευστών είναι θεμιτό να γίνουν παραδοχές για τη φύση της ροής οι οποίες θα διευκολύνουν την επίλυση των προβλημάτων. Συνήθεις χρησιμοποιούμενες παραδοχές είναι δυνατό να καταλήξουν στην επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων οι οποίες περιγράφουν την ιδανική ροή γύρω από και μέσα σε υδραυλικές κατασκευές. Μερικά είδη ιδανικών ροών είναι δυνατό να περιγραφούν με τη θεωρία της ροϊκής συνάρτησης καθώς και με τη θεωρία της δυναμικής ροής. Παραδοχές που χρησιμοποιούνται είναι,

- Ιδανικό ρευστό. Ασυμπίεστη ή συμπιεστή αλλά μη συνεκτική ροή. Στη θεώρηση μη συνεκτικής ροής οι διατμητικές τάσεις αγνοούνται πλήρως.

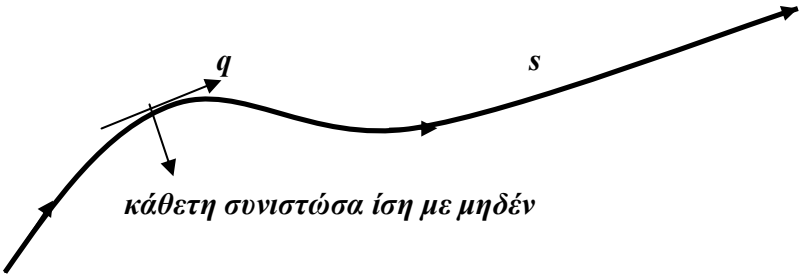
Στη προκείμενη περίπτωση ο συντελεστής του μοριακού ιξώδους $\mu$ θεωρείται ότι είναι μηδέν.

- Ομογενές και ισότροπο ρευστό. Οι φυσικές ιδιότητες του ρευστού παραμένουν σταθερές στο χώρο και το χρόνο.

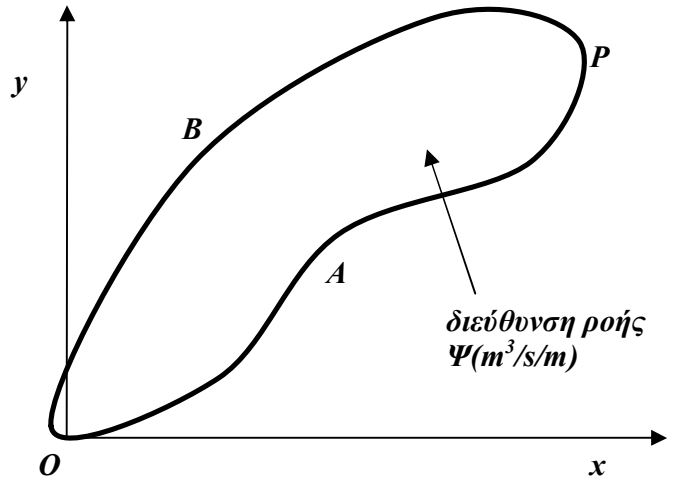
Με περαιτέρω απλοποίηση των υπολογισμών είναι δυνατό να θεωρηθεί σταθερή και δισδιάστατη ροή. Βέβαια, με τις σημερινές τεχνολογικές δυνατότητες είναι δυνατό οι παραδοχές της σταθερής και δισδιάστατης ροής να αρθούν και αντ΄ αυτών να ισχύσουν ασταθείς, συνεκτικές και τρισδιάστατες ροές. Στη θεωρία της ύπαρξης ροϊκής συνάρτησης $\Psi$ $(m^2/s)$, ο καθορισμός των τιμών αυτής στο υπολογιστικό χώρο μπορεί να οδηγήσει αμέσως στον υπολογισμό ταχυτήτων σε κάθε κόμβο. Έτσι και είναι γνωστές οι ταχύτητες, τότε από την εξίσωση του Bernoulli, Εξ 1.40, προσδιορίζεται η κατανομή των πιέσεων στο χώρο, διότι το ολικό φορτίο (ολική πίεση) διατηρείται σταθερό στο χώρο ροής. Από τις κατανομές πιέσεων μεγάλου ενδιαφέροντος είναι εκείνες που υπολογίζονται στα όρια της κατασκευής. Η γνώση των πιέσεων στα όρια οδηγεί στο υπολογισμό των ασκούμενων δυνάμεων στη κατασκευή.

### 1.3.2. Ροϊκή συνάρτηση

Μια ροϊκή γραμμή έχει την ιδιότητα, τη στιγμή της θεώρησης, το ρευστό να κινείται παντού κατά μήκος της γραμμής, δηλαδή το διάνυσμα της ταχύτητας να είναι εφαπτομενικά κείμενο της καμπύλης γραμμής σε κάθε σημείο αυτής. Η συνισταμένη $q$, η οποία είναι η ολική ταχύτητα της ροής, Σχήμα 1.6, είναι εφαπτομενική της καμπύλης $s$. Η συνιστώσα της ταχύτητας η κάθετη προς τη καμπύλη $s$ σε κάθε σημείο αυτής είναι ίση προς μηδέν. Ας θεωρηθεί το Σχήμα 1.7. Η παροχή ανά μονάδα μήκους η διερχόμενη από την $OAP$, η οποία δεν είναι ροϊκή γραμμή, έστω ότι είναι $\Psi$. Τι γίνεται όμως με τη παροχή την εξερχόμενη από την $OBP$; Από τη διατήρηση της συνέχειας της μάζας, ο όγκος ρευστού ο εισερχόμενος στον χώρο $OAPBO$ είναι ίσος με τον εξερχόμενο από τον όγκο του ρευστού. Δηλαδή η $\Psi$ εγκάρσια προς την $OAP$ είναι ίση προς την $\Psi$ εγκάρσια προς την $OBP$ και προς πάσαν άλλη καμπύλη η οποία αρχίζει από το $O$ και καταλήγει προς το $P$. Το σημείο $P$ λέγεται ότι έχει $\Psi$ μονάδες ροής μεταξύ των $O$ και $P$ και εγκάρσια προς οποιαδήποτε γραμμή που συνδέει το $O$ με το $P$. Η παροχή μεταξύ του $O$ και ενός σημείου $P$ εξαρτάται σε ποιο σημείο του χώρου ευρίσκεται το $P$. Είναι δηλαδή $\Psi=f(x,y)$. Το ότι η $\Psi$ είναι σταθερή κατά μήκος μιας ροϊκής γραμμής ορίζει και την ονομασία της η οποία δίνεται ως ροϊκή συνάρτηση $\Psi$.




*Σχήμα 1.6 Ροϊκή γραμμή s. Η q είναι εφαπτόμενη της καμπύλης s. Η κάθετος συνιστώσα ροής είναι ίση με μηδέν*




*Σχήμα 1.7 Ροϊκή συνάρτηση Ψ*

Ας θεωρηθούν δύο εγγύς βρισκόμενες ροϊκές γραμμές και δύο σημεία ***P*** και ***P'*** πάνω σ΄ αυτές, Σχήμα 1.8, των οποίων ***dΨ*** είναι η επιπλέον ποσότητα ροής η διερχόμενη από το σημείο ***P'*** σχετικά με το ***P***. Για σταθερή και ασυμπίεστη ροή, η ποσότητα παροχής η εισερχόμενη στον χώρο ***PAP'P*** ισούται με τη ποσότητα παροχής που εξέρχεται από τον χώρο αυτό. Είναι,

$$d\Psi + vdx = udy \tag{1.45}$$

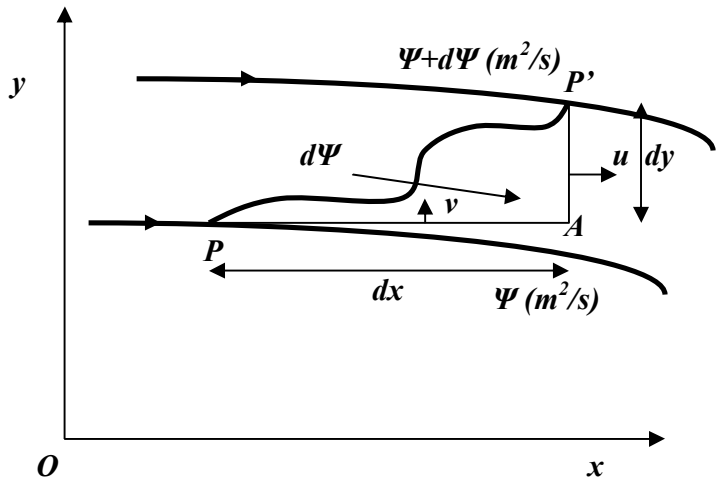
γιατί ***vdx*** και ***udy*** είναι οι παροχές ανά μονάδα μάζας, εισερχόμενη κατά την ***y***-διεύθυνση και εξερχόμενη κατά την ***x***-διεύθυνση, αντίστοιχα. Από την ανωτέρω εξίσωση είναι,

$$d\Psi = udy - vdx \tag{1.46}$$

και επειδή ***Ψ=f(x,y),*** είναι,

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y}dy \tag{1.47}$$

Από τις ανωτέρω δύο εξισώσεις είναι,




***Σχήμα 1.8 Υπολογισμός των συνιστωσών της ταχύτητας u,v από τη Ψ***

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{1.48}$$

Η εξίσωση της συνέχειας της μάζας, Εξ. 1.14, όπως εφαρμόζεται στο χώρο των δύο διαστάσεων ικανοποιείται αυτόματα γιατί,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1.49}$$

και με αντικατάσταση των τιμών από την Εξ. 1.48,

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} = 0 \tag{1.50}$$

Δηλαδή, η ροϊκή συνάρτηση ικανοποιεί την εξίσωση της συνέχειας της μάζας.

### 1.3.3 Κυκλοφορία-στροβιλότητα

Ας θεωρηθεί η κυκλοφορία $\delta k$ $(m^2/s)$, δηλαδή το γινόμενο της ταχύτητας επί την διανυθείσα απόσταση, γύρω από ένα στοιχειώδες ορθογώνιο διαστάσεων $\delta x \delta y$, Σχήμα 1.9. Έστω ότι η κυκλοφορία είναι θετική κατά τη διεύθυνση την αντίθετη προς την φορά των δεικτών του ρολογιού. Η στοιχειώδης κυκλοφορία $\delta k$ είναι,

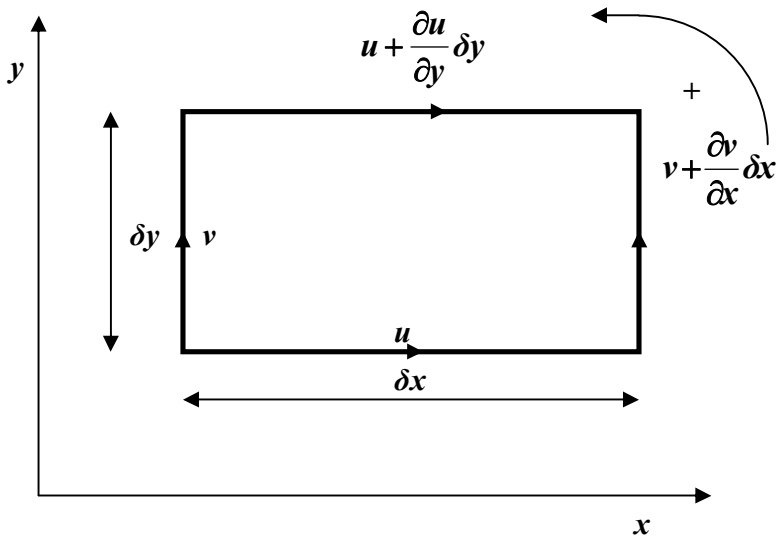
$$\delta k = u\delta x + (v + \frac{\partial v}{\partial x}\delta x)\delta y - (u + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y)\delta x - v\delta y \tag{1.51}$$

ή

$$\delta k = \frac{\partial v}{\partial x}\delta x \delta y - \frac{\partial u}{\partial y}\delta x \delta y \tag{1.52}$$

Η στροβιλότητα $\zeta$ $(sec^{-1})$ ορίζεται ως ο λόγος της κυκλοφορίας $\delta k$ γύρω από στοιχειώδες εμβαδό $\delta x \delta y$ ως προς το εμβαδό αυτό. Είναι,

$$\zeta = \frac{\delta k}{\delta x \delta y} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.53}$$




*Σχήμα 1.9 Κυκλοφορία γύρω από στοιχειώδες ορθογώνιο*

Προκειμένου περί αστρόβιλης ροής είναι $\zeta=0$, επομένως λόγω της Εξ. 1.53 είναι,

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{1.54}$$

και επειδή ισχύουν οι Εξ. 1.48, είναι,

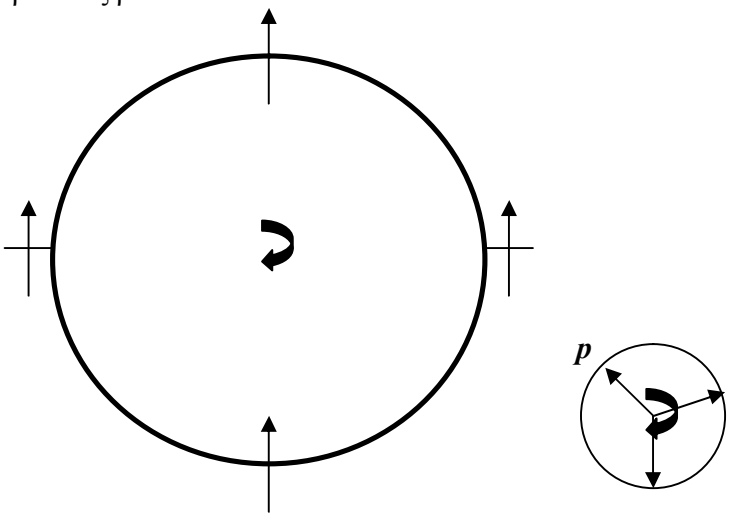
$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \tag{1.55}$$

Η ανωτέρω είναι η εξίσωση του Laplace. Στη γενική περίπτωση είναι,

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\zeta \tag{1.56}$$

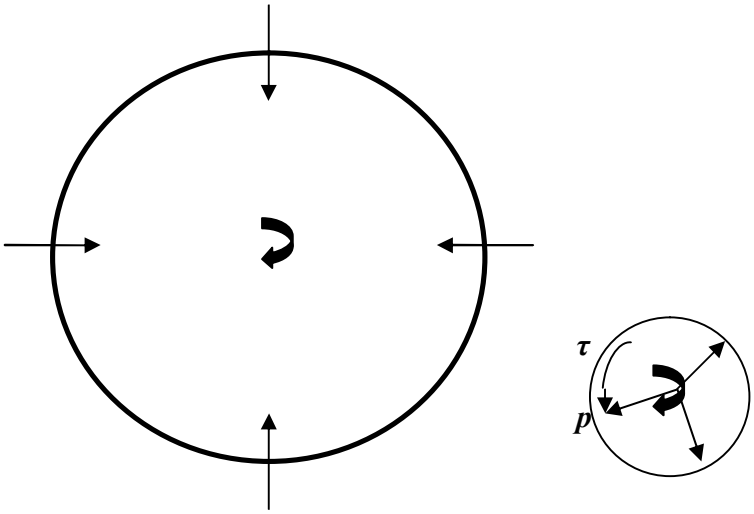
## 1.4 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΡΟΗ

Η δυναμική ροή εφαρμόζεται εκεί όπου η ροή είναι αστρόβιλη, όπου δηλαδή είναι, $\zeta=0$. Ο διαχωρισμός αστρόβιλης-στροβιλής ροής είναι δυνατό να γίνει εύκολα κατανοητός με τη θεώρηση της κίνηση των καθισμάτων του μεγάλου τροχού του Luna-Park, Σχήματα 1.10 και 1.11 τα οποία υποτίθεται ότι παριστούν τα σωμάτια του ρέοντος ρευστού.

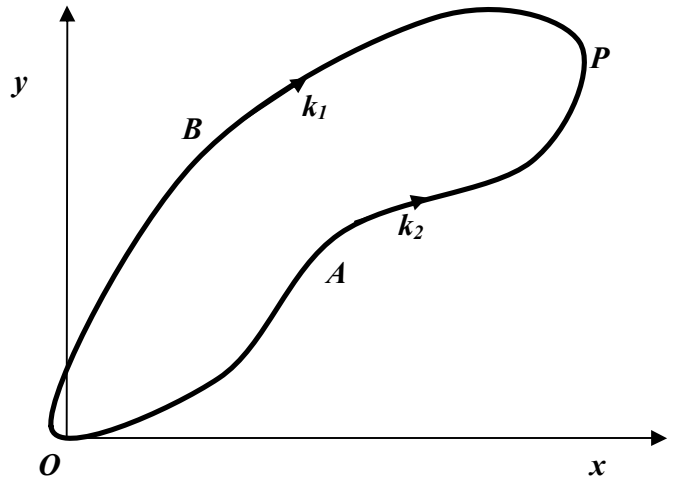



***Σχήμα 1.10 Αστρόβιλη ροή. Τα βέλη παριστάνουν τα καθίσματα του τροχού του Luna-Park. Τα σωμάτια του ρευστού συμπεριφέρνονται όπως τα καθίσματα. Στα ιδανικά ρευστά το ιξώδες αγνοείται και κατά συνέπεια οι διατμητικές τάσεις. Ύπαρξη πίεσης p***

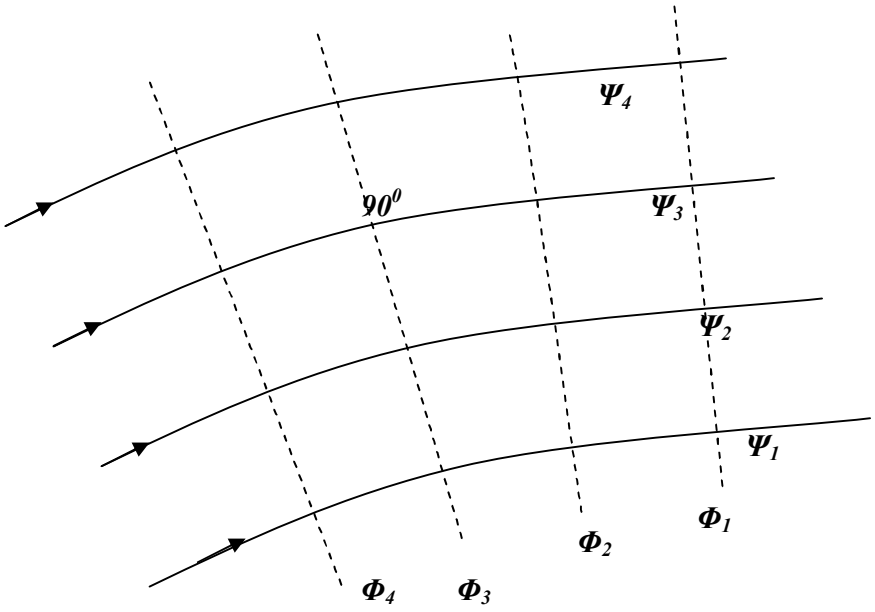
Η κυκλοφορία κατά μήκος της ***OAP*** είναι $k_1$ ενώ κατά μήκος της ***OBP*** είναι $k_2$, Σχήμα 1.12. Η συνολική κυκλοφορία κατά μήκος της κλειστής καμπύλης ***OAPBA*** είναι $k=k_1+(-k_2)=\iint \zeta dxdy=0$ για αστρόβιλη ροή ***(ζ=0)***. Η κυκλοφορία λοιπόν μέσω οποιασδήποτε διαδρομής είναι μοναδική για την αστρόβιλη ροή. Το σημείο ***P*** λέγεται ότι έχει ένα δυναμικό κυκλοφορίας μεγαλύτερο της τιμής την οποία είχε στο σημείο ***O*** κατ΄ αυτή τη μοναδική τιμή. Η κυκλοφορία αυτή μπορεί να ονομασθεί δυναμικό ταχύτητας ***Φ*** με μονάδες $(m/s\ m=m^2/s)$. Η αστρόβιλη ροή ονομάζεται και δυναμική ροή. Η ***Φ*** είναι συνάρτηση της απόστασης κατά μήκος ροϊκής γραμμής και αυξάνει στη διεύθυνση ροής. Οι γεωμετρικοί τόποι των σημείων τα οποία έχουν σταθερή τιμή ***Φ*** είναι γραμμές κάθετες στη ροϊκή γραμμή και ονομάζονται ισοδυναμικές γραμμές. Οι ροϊκές και οι ισοδυναμικές γραμμές είναι κάθετες μεταξύ των, Σχήμα 1.13.




***Σχήμα 1.11 Στροβιλή ροή. Τα σωμάτια περιστρέφονται γύρω από τους άξονές των. Αυτό γίνεται από τη παρουσία διατμητικών τάσεων τ οι οποίες προκύπτουν λόγω του ιξώδους του ρευστού***




*Σχήμα 1.12 Κυκλοφορία για αστρόβιλη ροή. $k_1=k_2$*




*Σχήμα 1.13 Ροϊκές και ισοδυναμικές γραμμές κάθετες μεταξύ τους*