Κεφάλαιο Ι

Προκαταρκτικά

1. ΣΥΝΟΛΑ

Έστω X ένα σύνολο και x ένα αντικείμενο. Χρησιμοποιούμε τους συμβολισμού

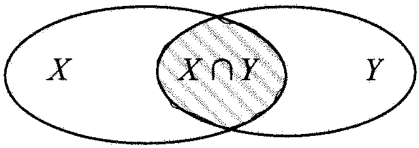
$$x \in X \text{ και } x \notin X$$

για να δηλώσουμε ότι το x ***ανήκει*** ή ***δεν ανήκει*** στο X αντίστοιχα. Θεωρούμε δύο σύν X και Y. Αν κάθε στοιχείο του X ανήκει και στο Y, τότε λέμε ότι το X είναι ***υποσύν*** του Y και το συμβολίζουμε $X \subseteq Y$. Αν συμβαίνει

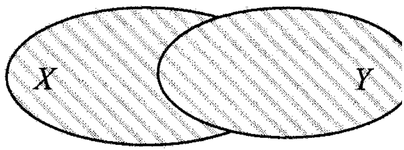
$$X \subseteq Y \text{ και } Y \subseteq X,$$

τότε τα X και Y ονομάζονται ***μεταξύ τους ίσα*** και αυτό σημειώνεται $X = Y$. Με παριστάνουμε το ***κενό*** σύνολο (δηλαδή το σύνολο που στερείται στοιχείων) και με $P(X$ σύνολο όλων των υποσυνόλων του X (***δυναμοσύνολο*** του X).

Να υπενθυμίσουμε τις βασικές πράξεις πάνω στα σύνολα. Ας είναι X και Y σύνολα. Η ***τομή*** τους $X \cap Y$ είναι το σύνολο που αποτελείται απ' όλα τα στοιχεία ανήκουν ταυτόχρονα στα X και Y, ενώ η ***ένωσή*** τους $X \cup Y$ είναι το σύνολο αποτελείται από τα στοιχεία που ανήκουν τουλάχιστον σ' ένα από τα X και Y.



$X \cup Y$



$$X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ και } x \in Y\}, \qquad X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ ή } x \in Y$$

Έχουμε τις επόμενες ιδιότητες

- $X \cap X = X$
- $X \cap Y = Y \cap X$
- $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$
- $X \cup X = X$
- $X \cup Y = Y \cup X$
- $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$

- $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
- $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$

Στην περίπτωση που συμβαίνει $X \cap Y = \emptyset$, τα σύνολα X, Y λέγονται ***μεταξύ τους ξένα***

Ως συνήθως, με $\boldsymbol{N}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ παριστάνουμε τα σύνολα των φυσικών, ακεραί ρητών, πραγματικών και μιγαδικών αριθμών αντίστοιχα.

Ένα σύνολο X ονομάζεται ***πεπερασμένο*** αν έχει n στοιχεία $(n \in \boldsymbol{N})$. Στ περίπτωση αυτή ο n συμβολίζεται $|X|$ και καλείται ***δύναμη*** (ή ***πληθάριθμος***) του X.

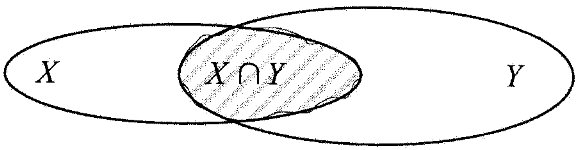
ΠΡΟΤΑΣΗ 1.1.1. (Αρχή προσθετικότητας) Αν X και Y είναι πεπερασμέ σύνολα, τότε και το $X \cup Y$ είναι πεπερασμένο και μάλιστα ισχύει

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|.$$

Απόδειξη. Αν τα X και Y είναι μεταξύ τους ξένα, δηλαδή $X \cap Y = \emptyset$, τ κάθε στοιχείο του $X \cup Y$ εμφανίζεται είτε στο X είτε στο Y αλλά όχι και στα δύο. Στ περίπτωση λοιπόν αυτή έχουμε

$$|X \cup Y| = |X| + |Y|.$$

Αν $X \cap Y \neq \emptyset$,



τότε το κομμάτι $X \cap Y$ ανήκει και στα δύο σύνολα X και Y και συνεπώς το άθροισ $|X| + |Y|$ περιέχει τον αριθμό $|X \cap Y|$ δύο φορές. Αν λοιπόν από τον $|X| + |$ αφαιρέσουμε το $|X \cap Y|$ θα βρούμε τον αριθμό $|X \cup Y|$, όπως το θέλαμε.

ΑΣΚΗΣΗ 1.1.1. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη σχέση, να δείξετε ότι για τ σύνολα X, Y, Z ισχύει

$$\begin{aligned} |X \cup Y \cup Z| = {} & |X| + |Y| + |Z| - \\ & -|X \cap Y| - |Y \cap Z| - |X \cap Z| + \\ & +|X \cap Y \cap Z| \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1.1. Σε κάποια έρευνα που έγινε ερωτήθηκαν άτομα ποιά από τ ακόλουθα προϊόντα καταναλώνουν περισσότερο:

ΓΑΛΑ, ΠΑΓΩΤΟ, ΓΙΑΟΥΡΤΙ.

- 15 άτομα απάντησαν ΓΑΛΑ,
- 10 άτομα απάντησαν ΠΑΓΩΤΟ,
- 7 άτομα απάντησαν ΓΙΑΟΥΡΤΙ,
- 5 άτομα απάντησαν ΓΑΛΑ και ΠΑΓΩΤΟ,
- 3 άτομα απάντησαν ΓΑΛΑ και ΓΙΑΟΥΡΤΙ,
- 2 άτομα απάντησαν ΠΑΓΩΤΟ και ΓΙΑΟΥΡΤΙ και, τέλος,
- 4 άτομα απάντησαν όλα.

Πόσα άτομα ερωτήθηκαν;

Ας ονομάσουμε X, Y, Z τα σύνολα των ατόμων που απάντησαν ΓΑΛΑ, ΠΑΓΩΤ και ΓΙΑΟΥΡΤΙ αντίστοιχα. Τότε

$$|X| = 15, \quad |Y| = 10, \quad |Z| = 7,$$

$$|X \cap Y| = 5, \quad |Y \cap Z| = 3, \quad |X \cap Z| = 2,$$

$$|X \cap Y \cap Z| = 4,$$

οπότε

$$|X \cup Y \cup Z| = 15 + 10 + 7 - 5 - 3 - 2 + 4 = 26 .$$

Άρα ερωτήθηκαν 26 άτομα.

□

Εισάγουμε τώρα μια νέα πράξη η οποία μας επιτρέπει να δημιουργούμε νέ μαθηματικά αντικείμενα. Η πράξη αυτή συνίσταται στην κατασκευή με τη βοήθεια δύ μαθηματικών αντικειμένων x και y ενός τρίτου αντικειμένου που το συμβολίζουμε $(x, y$ και το ονομάζουμε ***διατεταγμένο ζεύγος***. Η κατασκευή αυτή υπόκειται σ' ένα μόν περιορισμό:

$$(x, y) = (x', y') \quad \Leftrightarrow \quad (x = x' \text{ και } y = y').$$

Το ***καρτεσιανό γινόμενο*** των συνόλων X και Y ορίζεται τότε ως το σύνολο όλων τω διατεταγμένων ζευγών (x, y) που μπορούμε να κατασκευάσουμε όταν το x διατρέχει το X και το y διατρέχει το Y :

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ και } y \in Y\}.$$

Με ανάλογο τρόπο ορίζουμε την έννοια της ***διατεταγμένης*** n ***– άδας*** $(x_1, \dots, x_n)$ και το ***καρτεσιανού γινομένου*** n συνόλων:

$$X_1 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_s \in X_s, \ s = 1, \dots, n\}.$$

Ιδιαίτερα αν $X_1 = \ldots = X_n = X$, τότε το $X \times \cdots \times X$ συμβολίζεται απλά X^n.

Προταση 1.1.2. (***Αρχή της πολλαπλασιαστικότητας***). Αν X και Y πεπερασμένα σύνολα τότε

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$$

και γενικότερα

$$|X_1 \times \cdots \times X_n| = |X_1| \cdots |X_n|.$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ και $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ ζεύγη με πρώτο στοιχείο το x_1 είναι τα

$$(x_1, y_1), \quad (x_1, y_2), \quad \ldots, \quad (x_1, y_n)$$

και είναι σε πλήθος n. Τα ζεύγη με πρώτο στοιχείο το x_2 είναι τα

$$(x_2, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad \ldots, \quad (x_2, y_n)$$

κι είναι κι αυτά σε πλήθος n, κ.ο.κ., τα ζεύγη με πρώτο στοιχείο το x_m είναι τα

$$(x_m, y_1), \quad (x_m, y_2), \quad \ldots, \quad (x_m, y_n)$$

που είναι σε πλήθος n. Τελικά λοιπόν το σύνολο $X \times Y$ έχει

$$\underbrace{n + \cdots + n}_{m-\varphi o \rho \varepsilon \varsigma} = m \cdot n$$

στοιχεία, δηλαδή

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y|,$$

όπως το είπαμε. Ανάλογα αποδεικνύεται και η γενικότερη σχέση.

Παραδειγμα 1.1.2. Ένα ***αναγνωριστικό ετικέτας*** (***label identifier***) για πρόγραμμα Η/Υ συνίσταται από ένα γράμμα ακολουθούμενο από *3* ψηφία. διαφορετικά αναγνωριστικά ετικέτας είναι δυνατό να έχουμε;

Λύση. Συμβολίζουμε με X το σύνολο των γραμμάτων της αγγλικής αλφαβήτ ας είναι

$$Y = \{0, 1, \ldots, 9\}.$$

Τότε, τα στοιχεία του συνόλου $X \times Y \times Y \times Y$ ταυτίζονται ακριβώς με τα αναγνωριστι
ετικέτας οπότε

$$\left| X \times Y \times Y \times Y \right| = \left| X \right| \cdot \left| Y \right| \cdot \left| Y \right| \cdot \left| Y \right| = 26 \cdot 10^3 = 26000$$

(θα γνωρίζετε βέβαια ότι $\left| X \right| = 26$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1.3. Πόσα υποσύνολα έχει ένα σύνολο X με 4 στοιχεία;

Ας υποθέσουμε ότι

$$X = \left\{ x_1, x_2, x_3, x_4 \right\}.$$

Ένα οποιοδήποτε υποσύνολο A του X καθορίζεται πλήρως από μια διατεταγμένη τετρ
από $0-$ικά και $1-$άδες, αν στη θέση κάθε στοιχείου που ανήκει στο A βάλουμε το 1
στη θέση κάθε στοιχείου που δεν ανήκει στο A βάλουμε το 0. Π.χ. η τετράδα
αντιστοιχεί στο υποσύνολο

$$A = \left\{ x_2, x_3 \right\} \text{ είναι η } \left(0, 1, 1\, 0 \right),$$

στο υποσύνολο

$$A = \left\{ x_1, x_3\; x_4 \right\} \text{ είναι η } \left(1, 0, 1, 1 \right),$$

κ.λ.π. Έτσι, το πλήθος των υποσυνόλων του X δεν είναι παρά το πλήθος των στοιχείων
συνόλου

$$\left\{ 0, 1 \right\} \times \left\{ 0, 1 \right\} \times \left\{ 0, 1 \right\} \times \left\{ 0, 1 \right\} = \left\{ 0, 1 \right\}^4 .$$

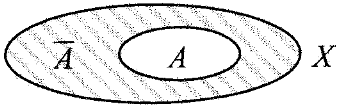
Σύμφωνα όμως με την αρχή της πολλαπλασιαστικότητας έχουμε

$$\left| \left\{ 0, 1 \right\}^4 \right| = \left| \left\{ 0, 1 \right\} \right| \cdot \left| \left\{ 0, 1 \right\} \right| \cdot \left| \left\{ 0, 1 \right\} \right| \cdot \left| \left\{ 0, 1 \right\} \right| = \left| \left\{ 0, 1 \right\} \right|^4 = 2^4 .$$

Ελπίζω να μη δυσκολευτείτε να δείξετε ότι αν ένα σύνολο X έχει n στοιχεία, τότ
δυναμοσύνολό του $P\left(X \right)$ έχει 2^n στοιχεία (καλή επιτυχία!)

ΑΣΚΗΣΗ 1.1.2. Έστω X ένα σύνολο και A ένα υποσύνολό του. Το ***συμπλήρ***
του A (ως προς X) ορίζεται ως εξής:

$$\overline{A} = \left\{ x \in X \,\middle|\, x \notin A \right\}.$$



Να δείξετε ότι

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$
$$A \cup \overline{A} = X, \quad A \cap \overline{A} = \varnothing, \quad \overline{\overline{A}} = A.$$

Θα κλείσουμε την παράγραφο αυτή με κάτι που μας είναι χρήσιμο στα επόμενα. υποθέσουμε ότι σε κάθε στοιχείο i ενός συνόλου I αντιστοιχεί ένα σύνολο X_i. Τότε λ ότι έχουμε μια ***οικογένεια συνόλων με δείκτες από το*** I και γράφουμε $(X_i)_{i\in I}$. Οι πράξ της ένωσης και της τομής δύο συνόλων εύκολα γενικεύονται για οικογένειες συνόλων. Έτσ ***τομή*** των συνόλων μιας οικογένειας $(X_i)_{i\in I}$ είναι το σύνολο των στοιχείων που ανήκ ταυτόχρονα σ' όλα τα X_i

$$\bigcap_{i\in I} X_i = \left\{ x \,\middle|\, x \in X_i, \text{ για κάθε } i \in I \right\}$$

ενώ η ***ένωση*** των συνόλων μιας οικογένειας $(X_i)_{i\in I}$ είναι το σύνολο των στοιχείων π ανήκουν σ' ένα τουλάχιστον από τα σύνολα X_i

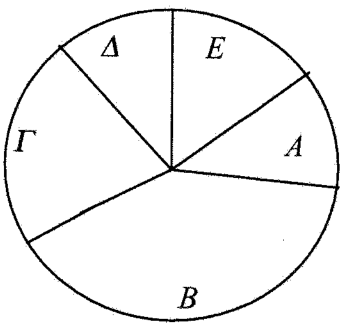
$$\bigcup_{i\in I} X_i = \left\{ x \,\middle|\, x \in X_i, \text{ για κάποιο } i \in I \right\}.$$

Ονομάζουμε ***διαμελισμό*** ενός συνόλου X κάθε οικογένεια $(X_i)_{i\in I}$ από μη-κε υποσύνολα του X τέτοια ώστε

- $X = \bigcup_{i\in I} X_i$

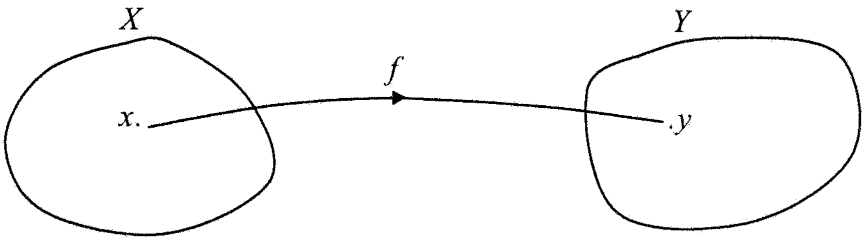
- $i \neq j \Rightarrow X_i \cap X_j = \varnothing$.

Για παράδειγμα, στο παρακάτω σχήμα τα σύνολα A, B, Γ, Δ, E διαμελίζουν το σύνολο X



2. ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

Μια ***απεικόνιση*** από ένα σύνολο X σ' ένα σύνολο Y δεν είναι παρά ε μηχανισμός f που από κάθε στοιχείο x του X παράγει ακριβώς ένα στοιχείο y του Y



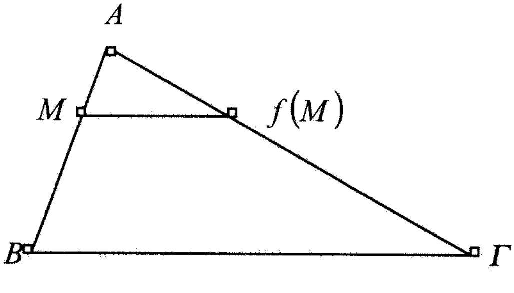
Το μοναδικό αυτό για το x στοιχείο y, ονομάζεται ***είδωλο*** ή ***εικόνα*** του x μέσω της f συμβολίζεται $f(x)$. Χρησιμοποιούμε έναν από τους συμβολισμούς

$$f : X \to Y \quad \text{ή} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

για να παραστήσουμε μια απεικόνιση από το X στο Y. Έτσι, αν π.χ. θέλουμε να μιλήσο για την απεικόνιση από το $\boldsymbol{Z}$ στο $\boldsymbol{N}$ που στέλνει τον ακέραιο a στον φυσικό a^2 + γράφουμε

$$f : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{N}, \quad f(a) = a^2 + 3 \quad \text{ή} \quad a \overset{f}{\mapsto} a^2 + 3 .$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2.1. Θεωρούμε το τρίγωνο $AB\Gamma$. Για κάθε σημείο M της πλευ AB συμβολίζουμε με $f(M)$ το σημείο που η παράλληλη προς τη $B\Gamma$ η αγόμενη απ M τέμνει την $A\Gamma$:



Με τον τρόπο αυτό ορίζεται μια απεικόνιση f από το σύνολο $[A, B]$ των σημείων ευθύγραμμου τμήματος AB, στο σύνολο $[A, \Gamma]$ των σημείων του ευθύγραμμου τμήμ $A\Gamma$.

Δύο απεικονίσεις $f, g : X \rightarrow Y$ είναι ***ίσες*** αν συμβαίνει

$$f(x) = g(x), \quad \text{για κάθε } x \in X .$$

Θα δούμε τώρα κάποια χαρακτηριστικά είδη απεικονίσεων. Μια απεικ $f : X \rightarrow Y$ λέγεται

- ***ένεση*** (ή $1-1$) αν

$$x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2),$$

δηλαδή αν στέλνει διαφορετικά στοιχεία του X σε διαφορετικά στοιχεία του Y ,

- ***έφεση*** (ή ***επί***) αν για κάθε στοιχείο $y \in Y$ υπάρχει στοιχείο $x \in X$ τέτοιο $f(x) = y$,

- ***αμφίεση*** αν είναι ταυτόχρονα ένεση και έφεση ($1-1$ και επί).

Η απεικόνιση του παραδείγματος 1.2.1 είναι φανερά αμφίεση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2.2. Για κάθε σύνολο X, η απεικόνιση $I_X : X \rightarrow X$ που στ κάθε στοιχείο $x \in X$ στον εαυτό του

$$I_X(x) = x$$

ονομάζεται ***ταυτοτική απεικόνιση*** και είναι φανερά αμφίεση.

Ένας άλλος τρόπος για να παραστήσουμε μια απεικόνιση f από το X στο Y ο ακόλουθος:

$$\xrightarrow{\;X\;} \boxed{\;f\;} \xrightarrow{\;Y\;}$$

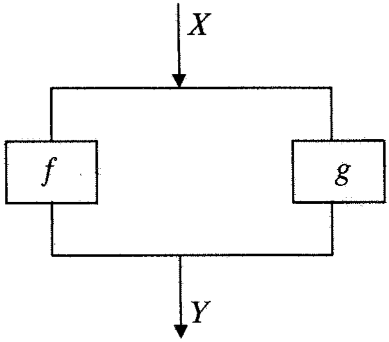
δηλαδή θεωρούμε την f ως ένα *"μαύρο κουτί"* με είσοδο το X και έξοδο το Y . Ιδια για την ταυτοτική απεικόνιση χρησιμοποιούμε το

$$\xrightarrow{\;X\;} \boxed{\quad\quad} \xrightarrow{\;X\;}$$

ακριβώς για να δηλώσουμε ότι η εισερχόμενη πληροφορία x δεν υφίσταται αλλοίωση διέρχεται από το "μαύρο κουτί"

$$\boxed{\;I_X\;}$$

Η ισότητα απεικονίσεων παρίσταται από το διάγραμμα



το οποίο εκφράζει ότι για μια οποιαδήποτε είσοδο x προκύπτει η ίδια έξοδος ανεξάρτητα το εάν θα χρησιμοποιήσουμε το "*μαύρο κουτί*" f ή το g :

$$f(x) = g(x).$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.2.1. Η ***χαρακτηριστική συνάρτηση*** χ_A ενός υποσυνόλου A του
ορίζεται ως εξής:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Να δείξετε ότι

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B,$$

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B.$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.2.2. Δίνεται η απεικόνιση $f : X \to Y$ και τα υποσύνολα $A \subseteq X$
$B \subseteq Y$. Το ***είδωλο*** ή ***εικόνα*** του A είναι το σύνολο

$$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \} \subseteq Y$$

και το ***αντιείδωλο*** ή ***αντίστροφη εικόνα*** του B είναι το υποσύνολο

$$f^{-1}(B) = \{ x \in X \mid f(x) \in B \}.$$

Να δείξετε ότι

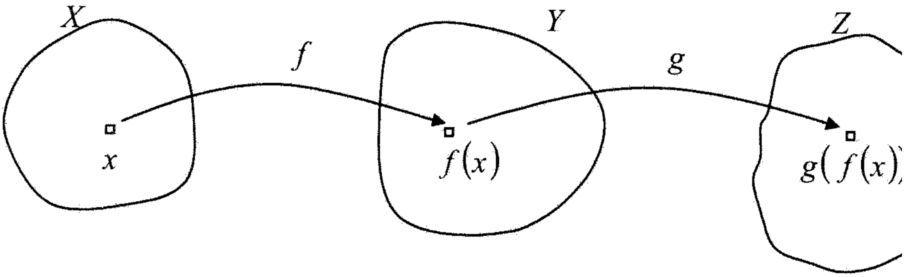
$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2), \quad f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

$$f^{-1}\left(\overline{B}\right)=\overline{f^{-1}(B)},$$

ενώ

$$f\left(A_1 \cup A_2\right)=f\left(A_1\right)\cup f\left(A_2\right), \quad f\left(A_1 \cap A_2\right)\subseteq f\left(A_1\right)\cap f\left(A_2\right).$$

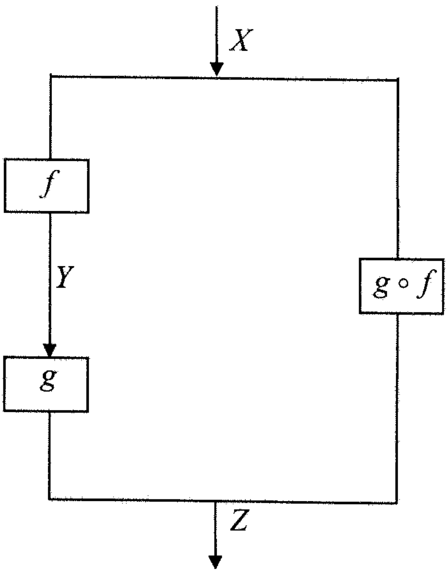
Μια βασική πράξη μεταξύ απεικονίσεων είναι η ***σύνθεση***. Ας υποθέσουμε ότι τις απεικονίσεις



Σε κάθε στοιχείο x του X, η f αντιστοιχεί ακριβώς ένα στοιχείο $f(x)$ του g στέλνει με τη σειρά της το $f(x)$ σε ακριβώς ένα στοιχείο $g(f(x))$ του Z. Έτσι, προηγούμενη διαδικασία σε κάθε στοιχείο x του συνόλου X αντιστοιχίσαμε ακριβ στοιχείο $g(f(x))$ του συνόλου Z. Μ' άλλους λόγους ορίσαμε μια απεικόνιση του Z που τη συμβολίζουμε $g \circ f$ και την ονομάζουμε ***σύνθεση*** της f με τη g:

$$g \circ f : X \to Z, \quad (g \circ f)(x)=g(f(x)), \quad \forall x \in X \quad .$$

Με μορφή διαγράμματος ροής η σύνθεση παριστάνεται ως εξής:



Η σύνθεση απεικονίσεων είναι ***προσεταιριστική*** με την εξής έννοια. Αν

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T$$

είναι τρεις απεικονίσεις, τότε

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

(αυτό θα το δείξουμε αργότερα ως ειδική περίπτωση ενός γενικότερου φαινομένου!).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2.3. Οποιαδήποτε απεικόνιση παραμένει αμετάβλητη αν συνθέσουμε με την ταυτοτική απεικόνιση. Συγκεκριμένα, για κάθε $f : X \to Y$ ισχύει

$$f \circ I_X = f = I_Y \circ f .$$

Πράγματι, για κάθε στοιχείο $x \in X$ έχουμε

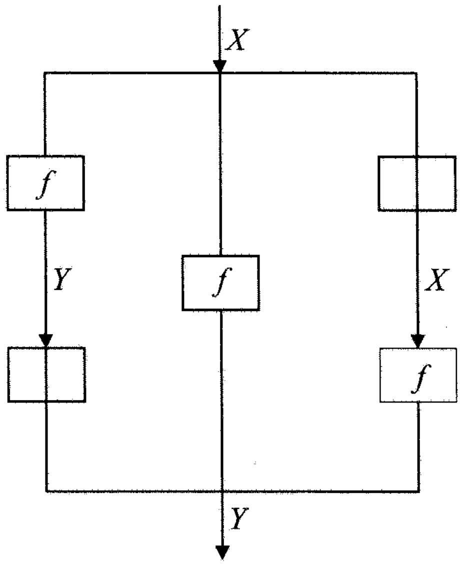
$$(f \circ I_X)(x) = f(I_X(x)) = f(x),$$

πράγμα που δείχνει ότι $f \circ I_X = f$, ενώ

$$(I_Y \circ f)(x) = I_Y(f(x)) = f(x),$$

δηλαδή $I_Y \circ f = f$ όπως το θέλαμε.

Οι προηγούμενες ισότητες με διάγραμμα ροής παρίστανται



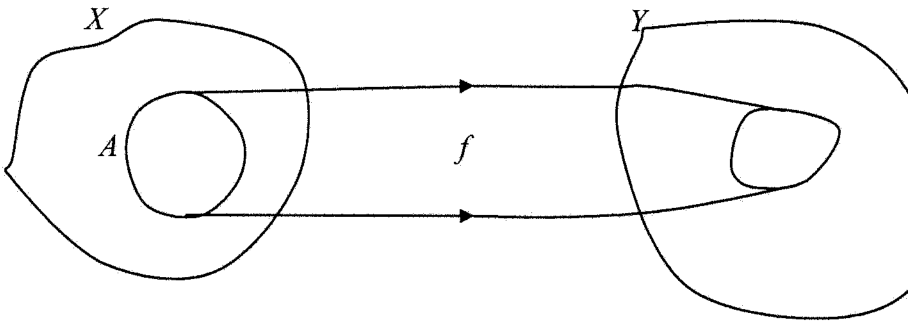
ΑΣΚΗΣΗ 1.2.3. Να βρείτε δύο απεικονίσεις $f, g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ για τις οποίες συμβαίνει $f \circ g \neq g \circ f$.

ΑΣΚΗΣΗ 1.2.4. Η σύνθεση δύο ενέσεων ($1-1$) είναι πάλι ένεση ($1-1$). Η σύνθ δύο εφέσεων (επί) είναι πάλι έφεση (επί). Η σύνθεση δύο αμφιέσεων ($1-1$ και επί) ε πάλι αμφίεση ($1-1$ και επί).

ΑΣΚΗΣΗ 1.2.5. Περιγράψτε με διάγραμμα ροής την προσεταιριστική ιδιότητα σύνθεσης απεικονίσεων.

3. ΜΕΡΙΚΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

Μια ***μερική απεικόνιση*** (***partial function***) f από το σύνολο X στο σύνολο Y είναι παρά μια απεικόνιση από ένα υποσύνολο A του X στο Y:



Το A λέγεται ***πεδίο ορισμού*** της f και συμβολίζεται $Dom(f)$. Είναι φανερό ότ απεικονίσεις από το X στο Y όπως τις ορίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, ταυτίζο με τις μερικές απεικονίσεις από το X στο Y των οποίων το πεδίο ορισμού είναι ολόκληρ X (γι' αυτό τις λέμε συχνά ***ολικές απεικονίσεις***). Με $Pfn(X,Y)$ συμβολίζουμε το σύν όλων των μερικών απεικονίσεων από το X στο Y. Η σύνθεση δύο μερικών απεικονίσ $f \in Pfn(X,Y)$ και $g \in Pfn(Y,Z)$ είναι η μερική απεικόνιση $g \circ f \in Pfn(X,Z)$ ορίζεται από

$$Dom(g \circ f) = \{x \in Dom(f) \mid f(x) \in Dom(g)\}$$

και

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad \text{για κάθε } x \in Dom(g \circ f).$$

Σε κάθε μερική απεικόνιση f από το X στο Y αντιστοιχεί μια (ολική) απεικόνιση

$$f^{\perp} : X \cup \{\perp\} \to Y \cup \{\perp\}$$

που ορίζεται ως εξής:

$$f^{\perp}(\omega) = \begin{cases} f(\omega), & \omega \in Dom(f) \\ \perp, & \omega \notin Dom(f) \text{ ή } \omega = \perp \end{cases}$$

Μ' άλλους λόγους η $f^{\perp}$ στέλνει κάθε στοιχείο του $Dom(f)$ στην εικόνα του $f(x)$, εν τα υπόλοιπα στοιχεία τα στέλνει στο $\perp$, το οποίο είναι ένα (εξωτικό!) στοιχείο που δεν ανήκ στα X και Y (πολλές φορές το ονομάζουμε και ''*καλάθι αχρήστων*'' αφού στέλνουμε αυτό όλα τα στοιχεία που δεν συμμετέχουν στον ορισμό της f).

Από τα παραπάνω φαίνεται καθαρά ότι για δύο οποιεσδήποτε μερικές απεικονίσ f και g από το X στο Y ισχύει $f = g$ τότε και μόνον όταν $f^{\perp} = g^{\perp}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.3.1. Αν $f \in Pfn(X, Y)$ και $g \in Pfn(Y, Z)$ τότε

$$(g \circ f)^{\perp} = g^{\perp} \circ f^{\perp}.$$

Απόδειξη. Για ν' αποδείξουμε την τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι οι (ολικ απεικονίσεις $(g \circ f)^{\perp}$ και $g^{\perp} \circ f^{\perp}$ έχουν το ίδιο σύνολο αφετηρίας $X \cup \{\perp\}$ και ίδιο σύνολο άφιξης $Z \cup \{\perp\}$ ενώ συμβαίνει

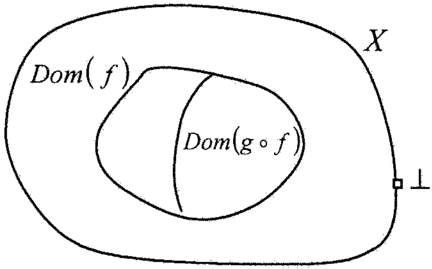
$$(g \circ f)^{\perp}(\omega) = (g^{\perp} \circ f^{\perp})(\omega), \quad \text{για κάθε } \omega \in X \cup \{\perp\}.$$

Πράγματι,

- αν $x \in Dom(g \circ f)$, τότε

$$(g \circ f)^{\perp}(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f^{\perp}(x)) = g^{\perp}(f^{\perp}(x)) = (g^{\perp} \circ f^{\perp})(x$$

- αν $x \in Dom(f)$ αλλά $x \notin Dom(g \circ f)$, τότε



$$(g \circ f)^{\perp}(x) = \perp \quad \text{και} \quad \left(g^{\perp} \circ f^{\perp}\right)(x) = g^{\perp}\left(f^{\perp}(x)\right) = g^{\perp}(f(x)) = \perp .$$

- Τέλος, αν $x \notin Dom(f)$ ή $x = \perp$, έχουμε

$$(g \circ f)^{\perp}(x) = \perp \quad \text{και} \quad \left(g^{\perp} \circ f^{\perp}\right)(x) = g^{\perp}\left(f^{\perp}(x)\right) = g^{\perp}(\perp) = \perp .$$

Κοιτάξτε τώρα πώς θα χρησιμοποιήσουμε την τελευταία πρόταση για να δείξου προσεταιρισμό στη σύνθεση μερικών απεικονίσεων. Ας υποθέσουμε ότι $f \in Pfn(X$ $g \in Pfn(Y, Z)$ και $h \in Pfn(Z, T)$. Θα έχουμε

$$[h \circ (g \circ f)]^{\perp} = h^{\perp} \circ (g \circ f)^{\perp} = h^{\perp} \circ \left(g^{\perp} \circ f^{\perp}\right) \overset{(*)}{=} \left(h^{\perp} \circ g^{\perp}\right) \circ f^{\perp} =$$

$$= (h \circ g)^{\perp} \circ f^{\perp} = [(h \circ g) \circ f]^{\perp},$$

οπότε είναι και

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f,$$

όπως το θέλαμε (στην ισότητα (*) κάναμε σιωπηρή χρήση του προσεταιρισμού για απεικονίσεις).

4. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΡΑΞΗΣ

Μια ***πράξη*** σ' ένα σύνολο E, δεν είναι παρά μια απεικόνιση

$$\lozenge : E \times E \to E, \quad (x, y) \mapsto x \lozenge y .$$

Μ' άλλα λόγια είναι ένας νόμος που σε κάθε ζεύγος στοιχείων του E αντιστοιχεί ένα τρίτ στοιχείο του E. Ας είναι E ένα σύνολο εφοδιασμένο με μια πράξη $\lozenge$.

- Αν για κάθε $x, y, z \in E$ συμβαίνει

$$x \lozenge (y \lozenge z) = (x \lozenge y) \lozenge z$$

τότε λέμε ότι η πράξη μας είναι ***προσεταιριστική***.

- Αν για κάθε $x, y \in E$ συμβαίνει

$$x \lozenge y = y \lozenge x$$

τότε λέμε ότι η πράξη μας είναι ***αντιμεταθετική***.

- Ένα στοιχείο e του συνόλου E λέγεται ***ουδέτερο*** για μια πράξη $\lozenge$, αν για κάθ $x \in E$ συμβαίνει

$$x \lozenge e = x = e \lozenge x$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.4.1. Κάθε πράξη έχει το πολύ ένα ουδέτερο στοιχείο.

Απόδειξη. Πράγματι, αν e και $\overline{e}$ είναι ουδέτερα στοιχεία της πράξης $\lozenge$, τότε γ κάθε $x \in E$ θα έχουμε

$$x \lozenge e = x = e \lozenge x$$

και

$$\overline{e} \lozenge x = x = x \lozenge \overline{e} .$$

Βάζοντας στην πρώτη σχέση $x = \overline{e}$ και στη δεύτερη $x = e$, βρίσκουμε

$$\overline{e} \lozenge e = \overline{e} = e \lozenge \overline{e}$$

και

$$\overline{e} \lozenge e = e = e \lozenge \overline{e}$$

απ' όπου παίρνουμε $e = \overline{e}$.

Αν τώρα ένα σύνολο E είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις

$$\lozenge : E \times E \to E, \quad (x, y) \mapsto x \lozenge y,$$

$$\nabla : E \times E \to E, \quad (x, y) \mapsto x \nabla y,$$

θα λέμε ότι η ∇ ***επιμερίζεται*** ως προς την $\lozenge$ αν για κάθε $x, y, z \in E$ συμβαίνει

$$x \nabla (y \lozenge z) = (x \nabla y) \lozenge (x \nabla z),$$

$$(x \lozenge y) \nabla z = (x \nabla z) \lozenge (y \nabla z).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4.1. Στο σύνολο $\boldsymbol{N}$ ιδού μερικές πράξεις.

$$(x, y) \mapsto x + y, \qquad (x, y) \mapsto x \cdot y,$$

$$(x, y) \mapsto max\{x, y\}, \qquad (x, y) \mapsto min\{x, y\}.$$

Όλες τους είναι προσεταιριστικές και αντιμεταθετικές

$$x + (y + z) = (x + y) + z, \qquad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$$

$$max\{x, max\{y, z\}\} = max\{max\{x, y\}, z\},$$

$$min\{x, min\{y, z\}\} = min\{min\{x, y\}, z\}.$$

Οι τρεις πρώτες έχουν ουδέτερο στοιχείο: το 0 για την πρόσθεση, το 1 γι πολλαπλασιασμό, το 0 για το max

$$max\{x, 0\} = x, \text{ για κάθε } x \in N,$$

ενώ η πράξη min δεν έχει ουδέτερο στοιχείο όπως εύκολα διαπιστώνεται. Τέλος, η max επιμερίζεται ως προς τη min κι αντίστροφα (δείξτε το!).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4.2. Στο σύνολο $P(X)$ των υποσυνόλων του X, ιδού μ πράξεις:

$$(A, B) \mapsto A \cup B, \quad (A, B) \mapsto A \cap B.$$

Όπως έχουμε ήδη δει, αμφότερες είναι προσεταιριστικές, αντιμεταθετικές, το $\varnothing$ εί ουδέτερο στοιχείο της $\cup$ και το X της $\cap$. Τέλος, η $\cap$ επιμερίζεται ως προς την αντίστροφα.

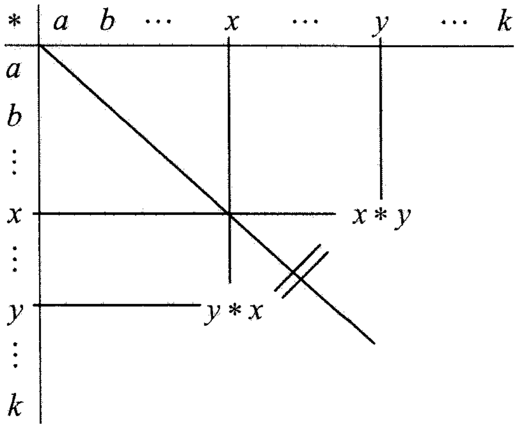
Σ' ένα πεπερασμένο σύνολο $E = \{a, b, \ldots, k\}$ μπορούμε να ορίσουμε μια πράξη με τη βοήθεια ενός τετράγωνου πίνακα, εάν γράψουμε το στοιχείο $x * y$ στη διασταύρα της γραμμής του x και της στήλης του y :

$$
\begin{array}{c|cccccc}
* & a & b & \cdots & y & \cdots & k \\
\hline
a & & & & & & \\
b & & & & & & \\
\vdots & & & & & & \\
x & & & & x * y & & \\
\vdots & & & & & & \\
k & & & & & &
\end{array}
$$

Τώρα, το ερώτημα είναι, πώς σ' έναν τέτοιο πίνακα θα διαπιστώσουμε την ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου ή εάν η πράξη είναι αντιμεταθετική. Ο έλεγχος είναι απλός: το στοιχ e είναι ουδέτερο αν αναπαράγει την πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
* & a & b & \cdots & e & \cdots & k \\
\hline
a & & & & a & & \\
b & & & & b & & \\
\vdots & & & & \vdots & & \\
e & a & b & \cdots & e & \cdots & k \\
\vdots & & & & \vdots & & \\
k & & & & k & &
\end{array}
$$

Αν πάλι ο πίνακάς μας είναι συμμετρικός ως προς την κύρια διαγώνιό του, τότε η πράξη ε αντιμεταθετική:



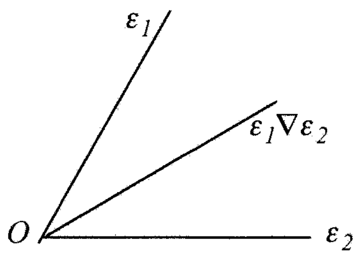
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4.3. Στο σύνολο $E = \{e, a, b\}$ ο πίνακας

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	a	a
b	b	a	a

ορίζει μια αντιμεταθετική πράξη (αφού είναι συμμετρικός ως προς την κύρια διαγώνιό ενώ το στοιχείο e είναι ουδέτερο, αφού αναπαράγει την πρώτη γραμμή και την πρώτη στή

ΑΣΚΗΣΗ 1.4.1. Στον σύνολο E όλων των ημιευθειών ενός επιπέδου (Π) ξεκινούν από σταθερό σημείο O, ορίζουμε μια πράξη ως εξής: για κάθε $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in$

$\varepsilon_1 \nabla \varepsilon_2$ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\varepsilon_1 \hat{O} \varepsilon_2$.



Να μελετήσετε την πράξη αυτή ως προς την προσεταιριστικότητα και την αντιμεταθετικότ
Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο;

Προκαταρκτικά

1. ΣΥΝΟΛΑ

Έστω X ένα σύνολο και x ένα αντικείμενο. Χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς

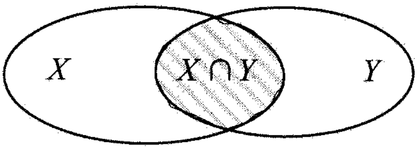
$$x \in X \text{ και } x \notin X$$

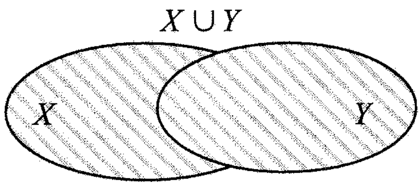
να δηλώσουμε ότι το x ***ανήκει*** ή ***δεν ανήκει*** στο X αντίστοιχα. Θεωρούμε δύο σύνολα και Y. Αν κάθε στοιχείο του X ανήκει και στο Y, τότε λέμε ότι το X είναι ***υποσύνολο*** Y και το συμβολίζουμε $X \subseteq Y$. Αν συμβαίνει

$$X \subseteq Y \text{ και } Y \subseteq X,$$

τα X και Y ονομάζονται ***μεταξύ τους ίσα*** και αυτό σημειώνεται $X = Y$. Με $\varnothing$ στάνουμε το ***κενό*** σύνολο (δηλαδή το σύνολο που στερείται στοιχείων) και με $P(X)$ το λο όλων των υποσυνόλων του X (***δυναμοσύνολο*** του X).

Να υπενθυμίσουμε τις βασικές πράξεις πάνω στα σύνολα. Ας είναι X και Y δύο λα. Η ***τομή*** τους $X \cap Y$ είναι το σύνολο που αποτελείται απ' όλα τα στοιχεία που κουν ταυτόχρονα στα X και Y, ενώ η ***ένωσή*** τους $X \cup Y$ είναι το σύνολο που τελείται από τα στοιχεία που ανήκουν τουλάχιστον σ' ένα από τα X και Y.





$$X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ και } x \in Y\}, \qquad X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ ή } x \in Y\}$$

υμε τις επόμενες ιδιότητες

- $X \cap X = X$
- $X \cap Y = Y \cap X$
- $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$

- $X \cup X = X$
- $X \cup Y = Y \cup X$
- $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$

- $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
- $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$

ιερίπτωση που συμβαίνει $X \cap Y = \varnothing$, τα σύνολα X, Y λέγονται ***μεταξύ τους ξένα.***

Ως συνήθως, με $\boldsymbol{N}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ παριστάνουμε τα σύνολα των φυσικών, ακεραίων, ', πραγματικών και μιγαδικών αριθμών αντίστοιχα.

Ένα σύνολο X ονομάζεται ***πεπερασμένο*** αν έχει n στοιχεία $(n \in \boldsymbol{N})$. Στην :ωση αυτή ο n συμβολίζεται $|X|$ και καλείται ***δύναμη*** (ή ***πληθάριθμος***) του X.

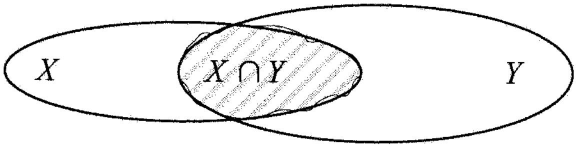
ΠΡΟΤΑΣΗ 1.1.1. (Αρχή προσθετικότητας) Αν X και Y είναι πεπερασμένα α, τότε και το $X \cup Y$ είναι πεπερασμένο και μάλιστα ισχύει

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|.$$

Απόδειξη. Αν τα X και Y είναι μεταξύ τους ξένα, δηλαδή $X \cap Y = \varnothing$, τότε ιτοιχείο του $X \cup Y$ εμφανίζεται είτε στο X είτε στο Y αλλά όχι και στα δύο. Στην :ωση λοιπόν αυτή έχουμε

$$|X \cup Y| = |X| + |Y|.$$

$\cap Y \neq \varnothing$,



ο κομμάτι $X \cap Y$ ανήκει και στα δύο σύνολα X και Y και συνεπώς το άθροισμα $\cdot |Y|$ περιέχει τον αριθμό $|X \cap Y|$ δύο φορές. Αν λοιπόν από τον $|X| + |Y|$ έσουμε το $|X \cap Y|$ θα βρούμε τον αριθμό $|X \cup Y|$, όπως το θέλαμε.

❐

ΑΣΚΗΣΗ 1.1.1. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη σχέση, να δείξετε ότι για τρία α X, Y, Z ισχύει

$$\begin{aligned} |X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - \\ - |X \cap Y| - |Y \cap Z| - |X \cap Z| + \\ + |X \cap Y \cap Z| \end{aligned}$$

❐

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1.1. Σε κάποια έρευνα που έγινε ερωτήθηκαν άτομα ποιά από τα θα προϊόντα καταναλώνουν περισσότερο:

ΓΑΛΑ, ΠΑΓΩΤΟ, ΓΙΑΟΥΡΤΙ.

- 15 άτομα απάντησαν ΓΑΛΑ,
- 10 άτομα απάντησαν ΠΑΓΩΤΟ,
- 7 άτομα απάντησαν ΓΙΑΟΥΡΤΙ,
- 5 άτομα απάντησαν ΓΑΛΑ και ΠΑΓΩΤΟ,
- 3 άτομα απάντησαν ΓΑΛΑ και ΓΙΑΟΥΡΤΙ,
- 2 άτομα απάντησαν ΠΑΓΩΤΟ και ΓΙΑΟΥΡΤΙ και, τέλος,
- 4 άτομα απάντησαν όλα.

ιτομα ερωτήθηκαν;

Ας ονομάσουμε X, Y, Z τα σύνολα των ατόμων που απάντησαν ΓΑΛΑ, ΠΑΓΩΤΟ ιΟΥΡΤΙ αντίστοιχα. Τότε

$$|X| = 15, \quad |Y| = 10, \quad |Z| = 7,$$

$$|X \cap Y| = 5, \quad |Y \cap Z| = 3, \quad |X \cap Z| = 2,$$

$$|X \cap Y \cap Z| = 4,$$

$$|X \cup Y \cup Z| = 15 + 10 + 7 - 5 - 3 - 2 + 4 = 26.$$

ωτήθηκαν 26 άτομα.

□

Εισάγουμε τώρα μια νέα πράξη η οποία μας επιτρέπει να δημιουργούμε νέα ιτικά αντικείμενα. Η πράξη αυτή συνίσταται στην κατασκευή με τη βοήθεια δύο ιτικών αντικειμένων x και y ενός τρίτου αντικειμένου που το συμβολίζουμε (x, y) ονομάζουμε ***διατεταγμένο ζεύγος***. Η κατασκευή αυτή υπόκειται σ' ένα μόνο ισμό:

$$(x, y) = (x', y') \quad \Leftrightarrow \quad (x = x' \text{ και } y = y').$$

οτεσιανό γινόμενο των συνόλων X και Y ορίζεται τότε ως το σύνολο όλων των ιγμένων ζευγών (x, y) που μπορούμε να κατασκευάσουμε όταν το x διατρέχει το X y διατρέχει το Y:

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ και } y \in Y\}.$$

άλογο τρόπο ορίζουμε την έννοια της ***διατεταγμένης*** n***-άδας*** $(x_1, \ldots, x_n)$ και του ***πιανού γινομένου*** n συνόλων:

$$X_1 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_s \in X_s, \ s = 1, \ldots, n\}.$$

αίτερα αν $X_1 = \ldots = X_n = X$, τότε το $X \times \cdots \times X$ συμβολίζεται απλά X^n.

Προταση 1.1.2. (*Αρχή της πολλαπλασιαστικότητας*). Αν X και Y είναι εερασμένα σύνολα τότε

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$$

γενικότερα

$$|X_1 \times \cdots \times X_n| = |X_1| \cdots |X_n|.$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ και $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Τα γη με πρώτο στοιχείο το x_1 είναι τα

$$(x_1, y_1), \quad (x_1, y_2), \quad \ldots, \quad (x_1, y_n)$$

είναι σε πλήθος n. Τα ζεύγη με πρώτο στοιχείο το x_2 είναι τα

$$(x_2, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad \ldots, \quad (x_2, y_n)$$

είναι κι αυτά σε πλήθος n, κ.ο.κ., τα ζεύγη με πρώτο στοιχείο το x_m είναι τα

$$(x_m, y_1), \quad (x_m, y_2), \quad \ldots, \quad (x_m, y_n)$$

είναι σε πλήθος n. Τελικά λοιπόν το σύνολο $X \times Y$ έχει

$$\underbrace{n + \cdots + n}_{m - \varphi o \rho \varepsilon \varsigma} = m \cdot n$$

ιχεία, δηλαδή

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y|,$$

ος το είπαμε. Ανάλογα αποδεικνύεται και η γενικότερη σχέση.

❒

Παραδειγμα 1.1.2. Ένα ***αναγνωριστικό ετικέτας*** (***label identifier***) για ένα γραμμα Η/Υ συνίσταται από ένα γράμμα ακολουθούμενο από *3* ψηφία. Πόσα φορετικά αναγνωριστικά ετικέτας είναι δυνατό να έχουμε;

Λύση. Συμβολίζουμε με X το σύνολο των γραμμάτων της αγγλικής αλφαβήτου κι είναι

$$Y = \{0, 1, \ldots, 9\}.$$

τα στοιχεία του συνόλου $X \times Y \times Y \times Y$ ταυτίζονται ακριβώς με τα αναγνωριστικά τας οπότε

$$|X \times Y \times Y \times Y| = |X| \cdot |Y| \cdot |Y| \cdot |Y| = 26 \cdot 10^3 = 26000$$

νωρίζετε βέβαια ότι $|X| = 26$).

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1.3. Πόσα υποσύνολα έχει ένα σύνολο X με 4 στοιχεία;

Ας υποθέσουμε ότι

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}.$$

οποιοδήποτε υποσύνολο A του X καθορίζεται πλήρως από μια διατεταγμένη τετράδα 0 – ικά και 1 – άδες, αν στη θέση κάθε στοιχείου που ανήκει στο A βάλουμε το 1 και θέση κάθε στοιχείου που δεν ανήκει στο A βάλουμε το 0. Π.χ. η τετράδα που στοιχεί στο υποσύνολο

$$A = \{x_2, x_3\} \text{ είναι η } (0, 1, 1\, 0),$$

υποσύνολο

$$A = \{x_1, x_3\, x_4\} \text{ είναι η } (1, 0, 1, 1),$$

ι. Έτσι, το πλήθος των υποσυνόλων του X δεν είναι παρά το πλήθος των στοιχείων του όλου

$$\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} = \{0, 1\}^4.$$

φωνα όμως με την αρχή της πολλαπλασιαστικότητας έχουμε

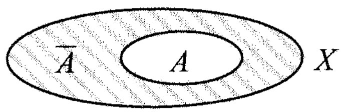
$$\left|\{0, 1\}^4\right| = |\{0, 1\}| \cdot |\{0, 1\}| \cdot |\{0, 1\}| \cdot |\{0, 1\}| = |\{0, 1\}|^4 = 2^4.$$

ίζω να μη δυσκολευτείτε να δείξετε ότι αν ένα σύνολο X έχει n στοιχεία, τότε το χμοσύνολό του $P(X)$ έχει 2^n στοιχεία (καλή επιτυχία!)

□

ΑΣΚΗΣΗ 1.1.2. Έστω X ένα σύνολο και A ένα υποσύνολό του. Το ***συμπλήρωμα*** A (ως προς X) ορίζεται ως εξής:

$$\overline{A} = \{x \in X \mid x \notin A\}.$$



δείξετε ότι

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$
$$A \cup \overline{A} = X, \quad A \cap \overline{A} = \varnothing, \quad \overline{\overline{A}} = A.$$

❐

Θα κλείσουμε την παράγραφο αυτή με κάτι που μας είναι χρήσιμο στα επόμενα. Ας :σουμε ότι σε κάθε στοιχείο i ενός συνόλου I αντιστοιχεί ένα σύνολο X_i. Τότε λέμε ουμε μια ***οικογένεια συνόλων με δείκτες από το*** I και γράφουμε $(X_i)_{i\in I}$. Οι πράξεις ωσης και της τομής δύο συνόλων εύκολα γενικεύονται για οικογένειες συνόλων. Έτσι, η των συνόλων μιας οικογένειας $(X_i)_{i\in I}$ είναι το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν χρονα σ' όλα τα X_i

$$\bigcap_{i\in I} X_i = \{x \mid x \in X_i, \ \text{για κάθε } i \in I\}$$

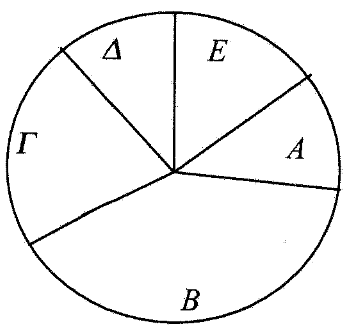
ι ***ένωση*** των συνόλων μιας οικογένειας $(X_i)_{i\in I}$ είναι το σύνολο των στοιχείων που ουν σ' ένα τουλάχιστον από τα σύνολα X_i

$$\bigcup_{i\in I} X_i = \{x \mid x \in X_i, \ \text{για κάποιο } i \in I\}.$$

Ονομάζουμε ***διαμελισμό*** ενός συνόλου X κάθε οικογένεια $(X_i)_{i\in I}$ από μη-κενά νολα του X τέτοια ώστε

- $X = \bigcup_{i\in I} X_i$
- $i \neq j \Rightarrow X_i \cap X_j = \varnothing$.

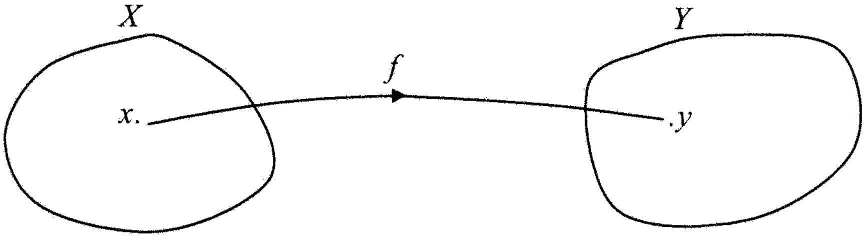
ιράδειγμα, στο παρακάτω σχήμα τα σύνολα A, B, Γ, Δ, E διαμελίζουν το σύνολο X:



❐

2. ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

Μια ***απεικόνιση*** από ένα σύνολο X σ' ένα σύνολο Y δεν είναι παρά ένας ανισμός f που από κάθε στοιχείο x του X παράγει ακριβώς ένα στοιχείο y του Y :



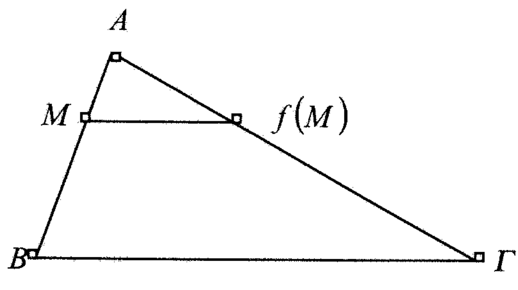
μοναδικό αυτό για το x στοιχείο y, ονομάζεται ***είδωλο*** ή ***εικόνα*** του x μέσω της f και βολίζεται $f(x)$. Χρησιμοποιούμε έναν από τους συμβολισμούς

$$f : X \to Y \quad \text{ή} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

να παραστήσουμε μια απεικόνιση από το X στο Y. Έτσι, αν π.χ. θέλουμε να μιλήσουμε την απεικόνιση από το $\boldsymbol{Z}$ στο $\boldsymbol{N}$ που στέλνει τον ακέραιο a στον φυσικό $a^2 + 3$, φουμε

$$f : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{N}, \quad f(a) = a^2 + 3 \quad \text{ή} \quad a \overset{f}{\mapsto} a^2 + 3.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2.1. Θεωρούμε το τρίγωνο $AB\Gamma$. Για κάθε σημείο M της πλευράς AB συμβολίζουμε με $f(M)$ το σημείο που η παράλληλη προς τη $B\Gamma$ η αγόμενη από το M τέμνει την $A\Gamma$:



Με τον τρόπο αυτό ορίζεται μια απεικόνιση f από το σύνολο $[A, B]$ των σημείων του ευθύγραμμου τμήματος AB, στο σύνολο $[A, \Gamma]$ των σημείων του ευθύγραμμου τμήματος $A\Gamma$.

❑

Δύο απεικονίσεις $f, g : X \to Y$ είναι ***ίσες*** αν συμβαίνει

$$f(x) = g(x), \quad \text{για κάθε } x \in X .$$

Θα δούμε τώρα κάποια χαρακτηριστικά είδη απεικονίσεων. Μια απεικόνιση $: X \to Y$ λέγεται

- ***ένεση*** (ή $1-1$) αν

$$x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2),$$

αδή αν στέλνει διαφορετικά στοιχεία του X σε διαφορετικά στοιχεία του Y ,

- ***έφεση*** (ή ***επί***) αν για κάθε στοιχείο $y \in Y$ υπάρχει στοιχείο $x \in X$ τέτοιο ώστε $x) = y$,

- ***αμφίεση*** αν είναι ταυτόχρονα ένεση και έφεση ($1-1$ και επί).

πεικόνιση του παραδείγματος 1.2.1 είναι φανερά αμφίεση.

Παραδειγμα 1.2.2. Για κάθε σύνολο X, η απεικόνιση $I_X : X \to X$ που στέλνει ε στοιχείο $x \in X$ στον εαυτό του

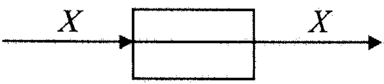
$$I_X(x) = x$$

μάζεται ***ταυτοτική απεικόνιση*** και είναι φανερά αμφίεση.

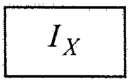
❐

Ένας άλλος τρόπος για να παραστήσουμε μια απεικόνιση f από το X στο Y είναι κόλουθος:

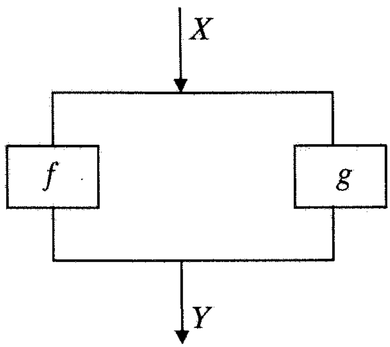
αδή θεωρούμε την f ως ένα *"μαύρο κουτί"* με είσοδο το X και έξοδο το Y . Ιδιαίτερα την ταυτοτική απεικόνιση χρησιμοποιούμε το



ιβώς για να δηλώσουμε ότι η εισερχόμενη πληροφορία x δεν υφίσταται αλλοίωση όταν ρχεται από το "μαύρο κουτί"



σότητα απεικονίσεων παρίσταται από το διάγραμμα



οίο εκφράζει ότι για μια οποιαδήποτε είσοδο x προκύπτει η ίδια έξοδος ανεξάρτητα με ν θα χρησιμοποιήσουμε το "*μαύρο κουτί*" f ή το g :

$$f(x) = g(x).$$

❒

ΑΣΚΗΣΗ 1.2.1. Η ***χαρακτηριστική συνάρτηση*** χ_A ενός υποσυνόλου A του X ται ως εξής:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

 είξετε ότι

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B,$$

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B.$$

❒

ΑΣΚΗΣΗ 1.2.2. Δίνεται η απεικόνιση $f : X \to Y$ και τα υποσύνολα $A \subseteq X$ και Y. Το ***είδωλο*** ή ***εικόνα*** του A είναι το σύνολο

$$f(A) = \{ f(x) | x \in A \} \subseteq Y$$

ο ***αντιείδωλο*** ή ***αντίστροφη εικόνα*** του B είναι το υποσύνολο

$$f^{-1}(B) = \{ x \in X \,|\, f(x) \in B \}.$$

είξετε ότι

$$^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2), \quad f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2),$$

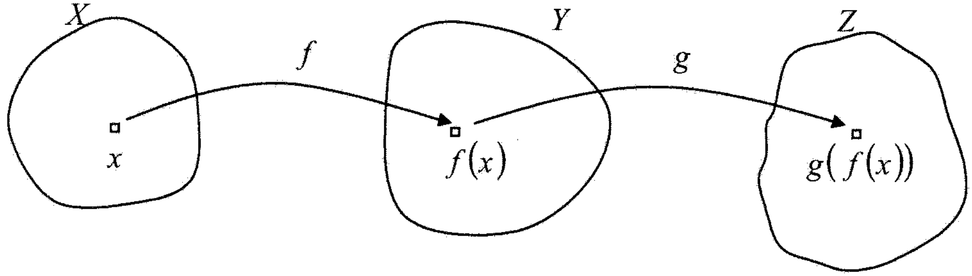
$$f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)},$$

νώ

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2), \quad f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2).$$

❐

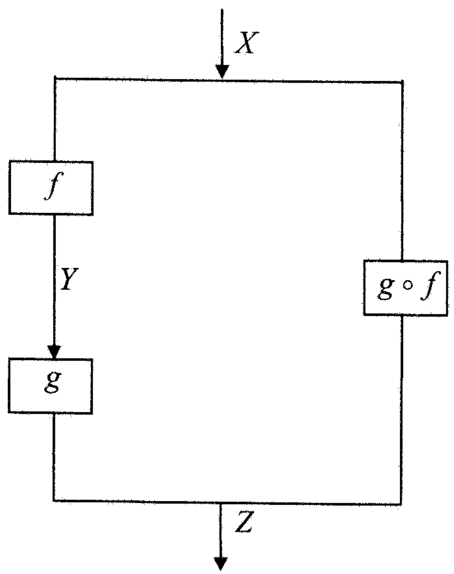
Μια βασική πράξη μεταξύ απεικονίσεων είναι η ***σύνθεση***. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ις απεικονίσεις



ε κάθε στοιχείο x του X, η f αντιστοιχεί ακριβώς ένα στοιχείο $f(x)$ του Y. Η ; στέλνει με τη σειρά της το $f(x)$ σε ακριβώς ένα στοιχείο $g(f(x))$ του Z. Έτσι, με την ροηγούμενη διαδικασία σε κάθε στοιχείο x του συνόλου X αντιστοιχίσαμε ακριβώς ένα τοιχείο $g(f(x))$ του συνόλου Z. Μ' άλλους λόγους ορίσαμε μια απεικόνιση του X στο ; που τη συμβολίζουμε $g \circ f$ και την ονομάζουμε ***σύνθεση*** της f με τη g:

$$g \circ f : X \to Z, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad \forall x \in X \ .$$

Ιε μορφή διαγράμματος ροής η σύνθεση παριστάνεται ως εξής:



ύνθεση απεικονίσεων είναι ***προσεταιριστική*** με την εξής έννοια. Αν

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T$$

ι τρεις απεικονίσεις, τότε

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

:ό θα το δείξουμε αργότερα ως ειδική περίπτωση ενός γενικότερου φαινομένου!).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2.3. Οποιαδήποτε απεικόνιση παραμένει αμετάβλητη αν τη θέσουμε με την ταυτοτική απεικόνιση. Συγκεκριμένα, για κάθε $f : X \to Y$ ισχύει

$$f \circ I_X = f = I_Y \circ f\,.$$

ιγματι, για κάθε στοιχείο $x \in X$ έχουμε

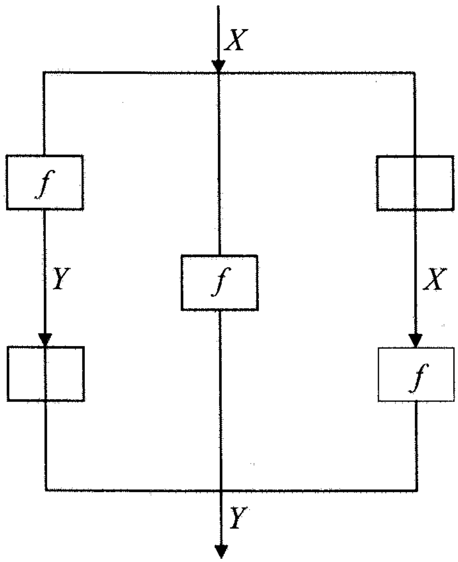
$$(f \circ I_X)(x) = f(I_X(x)) = f(x),$$

γμα που δείχνει ότι $f \circ I_X = f$, ενώ

$$(I_Y \circ f)(x) = I_Y(f(x)) = f(x),$$

αδή $I_Y \circ f = f$ όπως το θέλαμε.

Οι προηγούμενες ισότητες με διάγραμμα ροής παρίστανται



□

ΑΣΚΗΣΗ 1.2.3. Να βρείτε δύο απεικονίσεις $f, g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ για τις οποίες να]αίνει $f \circ g \neq g \circ f$.

❒

ΑΣΚΗΣΗ 1.2.4. Η σύνθεση δύο ενέσεων ($1-1$) είναι πάλι ένεση ($1-1$). Η σύνθεση εφέσεων (επί) είναι πάλι έφεση (επί). Η σύνθεση δύο αμφιέσεων ($1-1$ και επί) είναι αμφίεση ($1-1$ και επί).

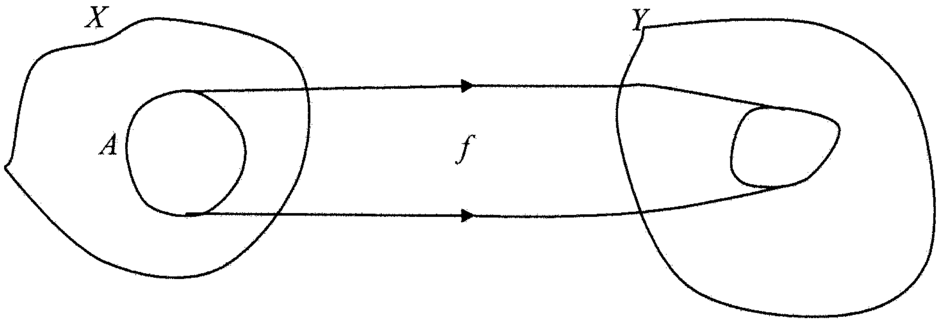
❒

ΑΣΚΗΣΗ 1.2.5. Περιγράψτε με διάγραμμα ροής την προσεταιριστική ιδιότητα της]εσης απεικονίσεων.

❒

3. ΜΕΡΙΚΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

Μια ***μερική απεικόνιση*** (***partial function***) f από το σύνολο X στο σύνολο Y δεν ι παρά μια απεικόνιση από ένα υποσύνολο A του X στο Y:



A λέγεται ***πεδίο ορισμού*** της f και συμβολίζεται $Dom(f)$. Είναι φανερό ότι οι κονίσεις από το X στο Y όπως τις ορίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, ταυτίζονται ς μερικές απεικονίσεις από το X στο Y των οποίων το πεδίο ορισμού είναι ολόκληρο το (γι' αυτό τις λέμε συχνά ***ολικές απεικονίσεις***). Με $Pfn(X,Y)$ συμβολίζουμε το σύνολο ν των μερικών απεικονίσεων από το X στο Y. Η σύνθεση δύο μερικών απεικονίσεων $\in Pfn(X,Y)$ και $g \in Pfn(Y,Z)$ είναι η μερική απεικόνιση $g \circ f \in Pfn(X,Z)$ που εται από

$$Dom(g \circ f) = \{x \in Dom(f) \mid f(x) \in Dom(g)\}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad \text{για κάθε } x \in Dom(g \circ f).$$

άθε μερική απεικόνιση f από το X στο Y αντιστοιχεί μια (ολική) απεικόνιση

$$f^{\perp} : X \cup \{\perp\} \to Y \cup \{\perp\}$$

ρίζεται ως εξής:

$$f^{\perp}(\omega) = \begin{cases} f(\omega), & \omega \in Dom(f) \\ \perp, & \omega \notin Dom(f) \text{ ή } \omega = \perp \end{cases}$$

λους λόγους η $f^{\perp}$ στέλνει κάθε στοιχείο του $Dom(f)$ στην εικόνα του $f(x)$, ενώ όλοιπα στοιχεία τα στέλνει στο $\perp$, το οποίο είναι ένα (εξωτικό!) στοιχείο που δεν ανήκει X και Y (πολλές φορές το ονομάζουμε και ''*καλάθι αχρήστων*'' αφού στέλνουμε σ' όλα τα στοιχεία που δεν συμμετέχουν στον ορισμό της f).

Από τα παραπάνω φαίνεται καθαρά ότι για δύο οποιεσδήποτε μερικές απεικονίσεις ι g από το X στο Y ισχύει $f = g$ τότε και μόνον όταν $f^{\perp} = g^{\perp}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.3.1. Αν $f \in Pfn(X, Y)$ και $g \in Pfn(Y, Z)$ τότε

$$(g \circ f)^{\perp} = g^{\perp} \circ f^{\perp}.$$

Απόδειξη. Για ν' αποδείξουμε την τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι οι (ολικές) ονίσεις $(g \circ f)^{\perp}$ και $g^{\perp} \circ f^{\perp}$ έχουν το ίδιο σύνολο αφετηρίας $X \cup \{\perp\}$ και το ύνολο άφιξης $Z \cup \{\perp\}$ ενώ συμβαίνει

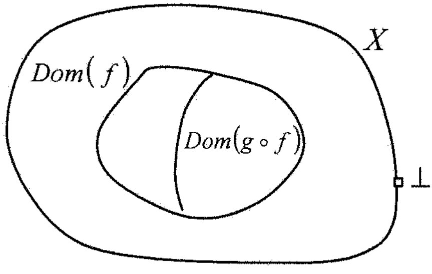
$$(g \circ f)^{\perp}(\omega) = (g^{\perp} \circ f^{\perp})(\omega), \quad \text{για κάθε } \omega \in X \cup \{\perp\}.$$

ματι,

- αν $x \in Dom(g \circ f)$, τότε

$$\circ f)^{\perp}(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f^{\perp}(x)) = g^{\perp}(f^{\perp}(x)) = (g^{\perp} \circ f^{\perp})(x)$$

- αν $x \in Dom(f)$ αλλά $x \notin Dom(g \circ f)$, τότε



$$(g \circ f)^{\perp}(x) = \perp \quad \text{και} \quad \left(g^{\perp} \circ f^{\perp}\right)(x) = g^{\perp}\left(f^{\perp}(x)\right) = g^{\perp}(f(x)) = \perp .$$

- Τέλος, αν $x \notin Dom(f)$ ή $x = \perp$, έχουμε

$$(g \circ f)^{\perp}(x) = \perp \quad \text{και} \quad \left(g^{\perp} \circ f^{\perp}\right)(x) = g^{\perp}\left(f^{\perp}(x)\right) = g^{\perp}(\perp) = \perp .$$

❐

Κοιτάξτε τώρα πώς θα χρησιμοποιήσουμε την τελευταία πρόταση για να δείξουμε τον ›οσεταιρισμό στη σύνθεση μερικών απεικονίσεων. Ας υποθέσουμε ότι $f \in Pfn(X, Y)$, $\in Pfn(Y, Z)$ και $h \in Pfn(Z, T)$. Θα έχουμε

$$[h \circ (g \circ f)]^{\perp} = h^{\perp} \circ (g \circ f)^{\perp} = h^{\perp} \circ \left(g^{\perp} \circ f^{\perp}\right) \overset{(*)}{=} \left(h^{\perp} \circ g^{\perp}\right) \circ f^{\perp} =$$

$$= (h \circ g)^{\perp} \circ f^{\perp} = [(h \circ g) \circ f]^{\perp},$$

ιότε είναι και

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f ,$$

ιως το θέλαμε (στην ισότητα (*) κάναμε σιωπηρή χρήση του προσεταιρισμού για ολικές ιεικονίσεις).

❐

4. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΡΑΞΗΣ

Μια ***πράξη*** σ' ένα σύνολο E, δεν είναι παρά μια απεικόνιση

$$\Diamond : E \times E \to E, \quad (x, y) \mapsto x \Diamond y .$$

λα λόγια είναι ένας νόμος που σε κάθε ζεύγος στοιχείων του E αντιστοιχεί ένα τρίτο είο του E. Ας είναι E ένα σύνολο εφοδιασμένο με μια πράξη $\Diamond$.

- Αν για κάθε $x, y, z \in E$ συμβαίνει

$$x \Diamond (y \Diamond z) = (x \Diamond y) \Diamond z$$

έμε ότι η πράξη μας είναι ***προσεταιριστική***.

- Αν για κάθε $x, y \in E$ συμβαίνει

$$x \Diamond y = y \Diamond x$$

έμε ότι η πράξη μας είναι ***αντιμεταθετική***.

- Ένα στοιχείο e του συνόλου E λέγεται ***ουδέτερο*** για μια πράξη $\Diamond$, αν για κάθε E συμβαίνει

$$x \Diamond e = x = e \Diamond x$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.4.1. Κάθε πράξη έχει το πολύ ένα ουδέτερο στοιχείο.

Απόδειξη. Πράγματι, αν e και $\overline{e}$ είναι ουδέτερα στοιχεία της πράξης $\Diamond$, τότε για $x \in E$ θα έχουμε

$$x \Diamond e = x = e \Diamond x$$

$$\overline{e} \Diamond x = x = x \Diamond \overline{e} .$$

τας στην πρώτη σχέση $x = \overline{e}$ και στη δεύτερη $x = e$, βρίσκουμε

$$\overline{e} \Diamond e = \overline{e} = e \Diamond \overline{e}$$

$$\overline{e} \Diamond e = e = e \Diamond \overline{e}$$

του παίρνουμε $e = \overline{e}$.

□

Αν τώρα ένα σύνολο E είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις

$$\Diamond : E \times E \to E, \quad (x, y) \mapsto x \Diamond y,$$

$$\nabla : E \times E \to E, \quad (x, y) \mapsto x \nabla y,$$

λέμε ότι η ∇ ***επιμερίζεται*** ως προς την $\Diamond$ αν για κάθε $x, y, z \in E$ συμβαίνει

$$x \nabla (y \Diamond z) = (x \nabla y) \Diamond (x \nabla z),$$

$$(x \Diamond y) \nabla z = (x \nabla z) \Diamond (y \nabla z).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4.1. Στο σύνολο N ιδού μερικές πράξεις.

$$(x, y) \mapsto x + y, \qquad (x, y) \mapsto x \cdot y,$$

$$(x, y) \mapsto max\{x, y\}, \qquad (x, y) \mapsto min\{x, y\}.$$

ες τους είναι προσεταιριστικές και αντιμεταθετικές

$$x + (y + z) = (x + y) + z, \qquad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$$

$$max\{x, max\{y, z\}\} = max\{max\{x, y\}, z\},$$

$$min\{x, min\{y, z\}\} = min\{min\{x, y\}, z\}.$$

τρεις πρώτες έχουν ουδέτερο στοιχείο: το 0 για την πρόσθεση, το 1 για τον λλαπλασιασμό, το 0 για το max

$$max\{x, 0\} = x, \text{ για κάθε } x \in N,$$

ώ η πράξη min δεν έχει ουδέτερο στοιχείο όπως εύκολα διαπιστώνεται. Τέλος, η πράξη ax επιμερίζεται ως προς τη min κι αντίστροφα (δείξτε το!).

❐

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4.2. Στο σύνολο $P(X)$ των υποσυνόλων του X, ιδού μερικές άξεις:

$$(A, B) \mapsto A \cup B, \quad (A, B) \mapsto A \cap B.$$

πως έχουμε ήδη δει, αμφότερες είναι προσεταιριστικές, αντιμεταθετικές, το $\varnothing$ είναι το ουδέτερο στοιχείο της $\cup$ και το X της $\cap$. Τέλος, η $\cap$ επιμερίζεται ως προς την $\cup$ κι ντίστροφα.

❐

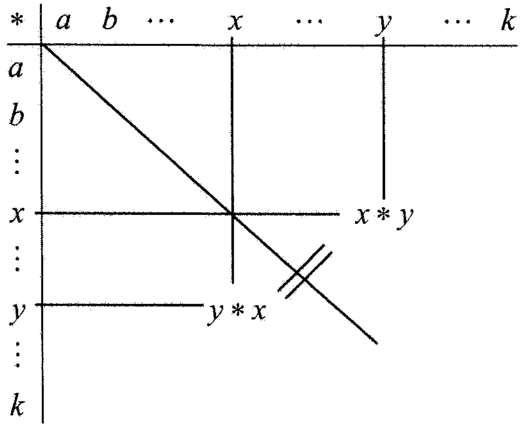
Σ' ένα πεπερασμένο σύνολο $E = \{a, b, \ldots, k\}$ μπορούμε να ορίσουμε μια πράξη $*$ η βοήθεια ενός τετράγωνου πίνακα, εάν γράψουμε το στοιχείο $x * y$ στη διασταύρωση γραμμής του x και της στήλης του y :

$$
\begin{array}{c|cccccc}
* & a & b & \cdots & y & \cdots & k \\
\hline
a & & & & & & \\
b & & & & & & \\
\vdots & & & & & & \\
x & & & & x * y & & \\
\vdots & & & & & & \\
k & & & & & &
\end{array}
$$

α, το ερώτημα είναι, πώς σ' έναν τέτοιο πίνακα θα διαπιστώσουμε την ύπαρξη του ιτερου στοιχείου ή εάν η πράξη είναι αντιμεταθετική. Ο έλεγχος είναι απλός: το στοιχείο ίναι ουδέτερο αν αναπαράγει την πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
* & a & b & \cdots & e & \cdots & k \\
\hline
a & & & & a & & \\
b & & & & b & & \\
\vdots & & & & \vdots & & \\
e & a & b & \cdots & e & \cdots & k \\
\vdots & & & & \vdots & & \\
k & & & & k & &
\end{array}
$$

τάλι ο πίνακάς μας είναι συμμετρικός ως προς την κύρια διαγώνιό του, τότε η πράξη είναι μεταθετική:



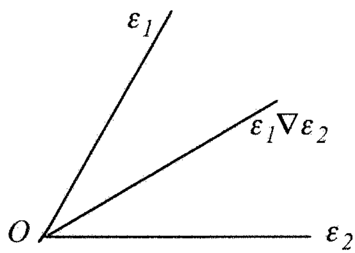
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4.3. Στο σύνολο $E = \{e, a, b\}$ ο πίνακας

*	e	a	b
e	e	a	b
a	a	a	a
b	b	a	a

ει μια αντιμεταθετική πράξη (αφού είναι συμμετρικός ως προς την κύρια διαγώνιό του) το στοιχείο e είναι ουδέτερο, αφού αναπαράγει την πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη.

❐

ΑΣΚΗΣΗ 1.4.1. Στον σύνολο E όλων των ημιευθειών ενός επιπέδου (Π) που νούν από σταθερό σημείο O, ορίζουμε μια πράξη ως εξής: για κάθε $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in E$, $\nabla \varepsilon_2$ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\varepsilon_1 \hat{O} \varepsilon_2$.



ιελετήσετε την πράξη αυτή ως προς την προσεταιριστικότητα και την αντιμεταθετικότητα. ρχει ουδέτερο στοιχείο;

❐

ΑΣΚΗΣΗ 1.4.2 (πρόσθεση ωρολογίου). Στο σύνολο $E = \{1, 2, \ldots, 12\}$ ορίζουμε ής πράξη:

$$x \oplus y = \begin{cases} x + y, & \alpha\nu \ \ x + y \leq 12 \\ x + y - 12, & \alpha\nu \ \ x + y > 12 \end{cases}$$

μπληρώσετε το ταμπλώ.

$\oplus$	1	2	$\cdots$	12
1				
2				
$\vdots$				
12				

$$10 \oplus 3 = 1, \quad 7 \oplus 11 = 6, \quad 1 \oplus 4 = 5,$$

□

5. ΗΜΙΔΑΚΤΥΛΙΟΙ

Ένας ***ημιδακτύλιος*** είναι ένα σύνολο A εφοδιασμένο με δυο πράξεις

$$\Diamond : A\times A \to A, \quad (x, y)\mapsto x\Diamond y$$
$$\nabla : A\times A \to A, \quad (x, y)\mapsto x\nabla y .$$

α την πρώτη πράξη απαιτούμε να είναι

- προσεταιριστική: $x\Diamond(y\Diamond z) = (x\Diamond y)\Diamond z, \quad \forall x, y, z\in A,$
- αντιμεταθετική: $x\Diamond y = y\Diamond x, \quad \forall x, y\in A,$
- να έχει ουδέτερο στοιχείο: $x\Diamond e = x = e\Diamond x, \quad \forall x\in A, e\in A,$

ώ για τη δεύτερη πράξη απαιτούμε να είναι

- προσεταιριστική: $x\nabla(y\nabla z) = (x\nabla y)\nabla z, \quad \forall x, y, z\in A,$
- να έχει ουδέτερο στοιχείο: $x\nabla f = x = f\nabla x, \quad \forall x\in A, f\in A,$

- να είναι επιμεριστική ως προς τη $\Diamond$:

$$x\nabla(y\Diamond z) = (x\nabla y)\Diamond(x\nabla z) \text{ και } (x\Diamond y)\nabla z = (x\nabla z)\Diamond(y\nabla z), \quad \forall x, y, z\in A$$

- να ισχύει

$$x\nabla e = e = e\nabla x, \quad \forall x\in A,$$

ου e είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρώτης πράξης $\Diamond$. Αν, επιπλέον, συμβαίνει

$$x\nabla y = y\nabla x, \quad \forall x, y\in A,$$

ημιδακτύλιός μας ονομάζεται ***αντιμεταθετικός***. Αν οι πράξεις $\Diamond$ και ∇ παρίστανται ως όσθεση $(+)$ και ως πολλαπλασιασμός $(\cdot)$ αντίστοιχα, τότε τα παραπάνω αξιώματα ίρνουν την οικεία μορφή

- $x+(y+z)=(x+y)+z,$
- $x+y=y+x,$
- $x+0=x,$
- $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z,$
- $x\cdot 1=1\cdot x=x,$
- $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$ και $(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z,$
- $x\cdot 0=0=0\cdot x,$