

# 1

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

### 1.1. Ιστορική αναδρομή

Εμπρός στο δρόμο που χάραξε ο Mendeleev!  
Ανώνυμος

Η Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων (ΦΣΣ) ασχολείται με τους εσώτερους δομικούς λίθους της ύλης. Προϋπόθεση της ΦΣΣ είναι η φιλοσοφική διαπίστωση ότι όλα τα πολύπλοκα φαινόμενα που υποπίπτουν στην αντίληψή μας ανάγονται σε τελευταία ανάλυση σε πολύ απλούστερες διαδικασίες και συστατικά. Την φιλοσοφική αυτή πρόταση την χρωστάμε στους Έλληνες. Ο Εμπεδοκλής έλεγε ότι τα «ριζώματα» (ρίζες) όλων των πραγμάτων είναι τέσσερα (γη, νερό, αέρας, φωτιά).

Για κάποιον που ασχολείται με την κινητική θεωρία των αερίων, τα μόρια είναι σημειακά σωματίδια (δηλ. «ριζώματα»). Για ένα χημικό που μελετάει το ενεργειακό φάσμα των διατομικών μορίων τα ριζώματα είναι τα άτομα. Οι ατομικοί φυσικοί γνωρίζουν πολύ καλά ότι το εσώτερο συστατικό του ατόμου είναι οι πυρήνες. Οι πυρηνικοί φυσικοί ανέκάλυψαν ότι οι πυρήνες αποτελούνται από πρωτόνια και νετρόνια. Τέλος οι φυσικοί των στοιχειωδών σωματιδίων πιστεύουν ότι τα πρωτόνια και τα νετρόνια κατασκευάζονται από δομικούς λίθους (ή ριζώματα) γνωστούς σαν κουάρκς (quarks). Παρατηρούμε ότι οι φυσικές οντότητες σε πρώτη προσέγγιση μας φαίνονται σημειακές και στοιχειώδεις. Αργότερα οι οντότητες αυτές πολλαπλασιάζονται (υπερβολικά μεγάλος αριθμός χημικών στοιχείων, υπερβολικά μεγάλος αριθμός στοιχειωδών σωματιδίων) και οι επιστήμονες ανακαλύπτουν την ύπαρξη συμμετριών ανάμεσα στις διάφορες οντότητες, όπως ο περιοδικός πίνακας του Μεν-

deleev για τα χημικά στοιχεία, ή οι «πολλαπλότητες» των Gell-Mann - Ne'eman για τα στοιχειώδη σωματίδια. Σ' ένα δεύτερο στάδιο η ύπαρξη των συμμετριών ανάγεται σε μία εσώτερη δυναμική, όπου ένας μικρός αριθμός «ριζωμάτων» συνδυάζονται για να αναπαράγουν τις διάφορες φυσικές οντότητες (π.χ. τα άτομα μας δίνουν τα χημικά στοιχεία, ή τα κουάρκς συνδυαζόμενα μας δίνουν τα στοιχειώδη σωματίδια). Η εξέλιξη της φυσικής του μικρόκοσμου μοιάζει λίγο με την γνωστή ρωσική κούκλα που περιέχει μέσα της μία άλλη κούκλα που με τη σειρά της περιέχει...

Η ΦΣΣ δεν ασχολείται μόνο με τα στοιχειώδη σωματίδια σαν οντότητες, αλλά και με τις αλληλεπιδράσεις τους, π.χ. μέσα από ποιά δυναμική τα κουάρκς συνθέτουν το πρωτόνιο. Η μελέτη και η ανάλυση των αλληλεπιδράσεων αποτελεί μια εξαιρετικά πολύπλοκη και δύσκολη δουλειά. Σε κάθε κλίμακα οι δυνάμεις έχουν την δικιά τους ιδιομορφία (άλλη η φυσική των ισχυρών αλληλεπιδράσεων και άλλη η φυσική των ασθενών αλληλεπιδράσεων) και δεν είναι λίγες οι φορές που οι φυσικοί έχοντας σαν θεωρητικές αποσκευές τις ήδη υπάρχουσες θεωρίες βρέθηκαν μπροστά σε εκπλήξεις και απρόσμενα φαινόμενα.

Μια άλλη ονομασία της Φυσικής των Στοιχειωδών Σωματιδίων είναι Φυσική των Υψηλών Ενεργειών (ΦΥΕ). Κατανοούμε την ονομασία Φυσική των Υψηλών Ενεργειών αν θυμηθούμε ότι η αρχή αβεβαιότητας του Heisenberg

$$\Delta p \Delta x \geq \hbar \quad (1.1)$$

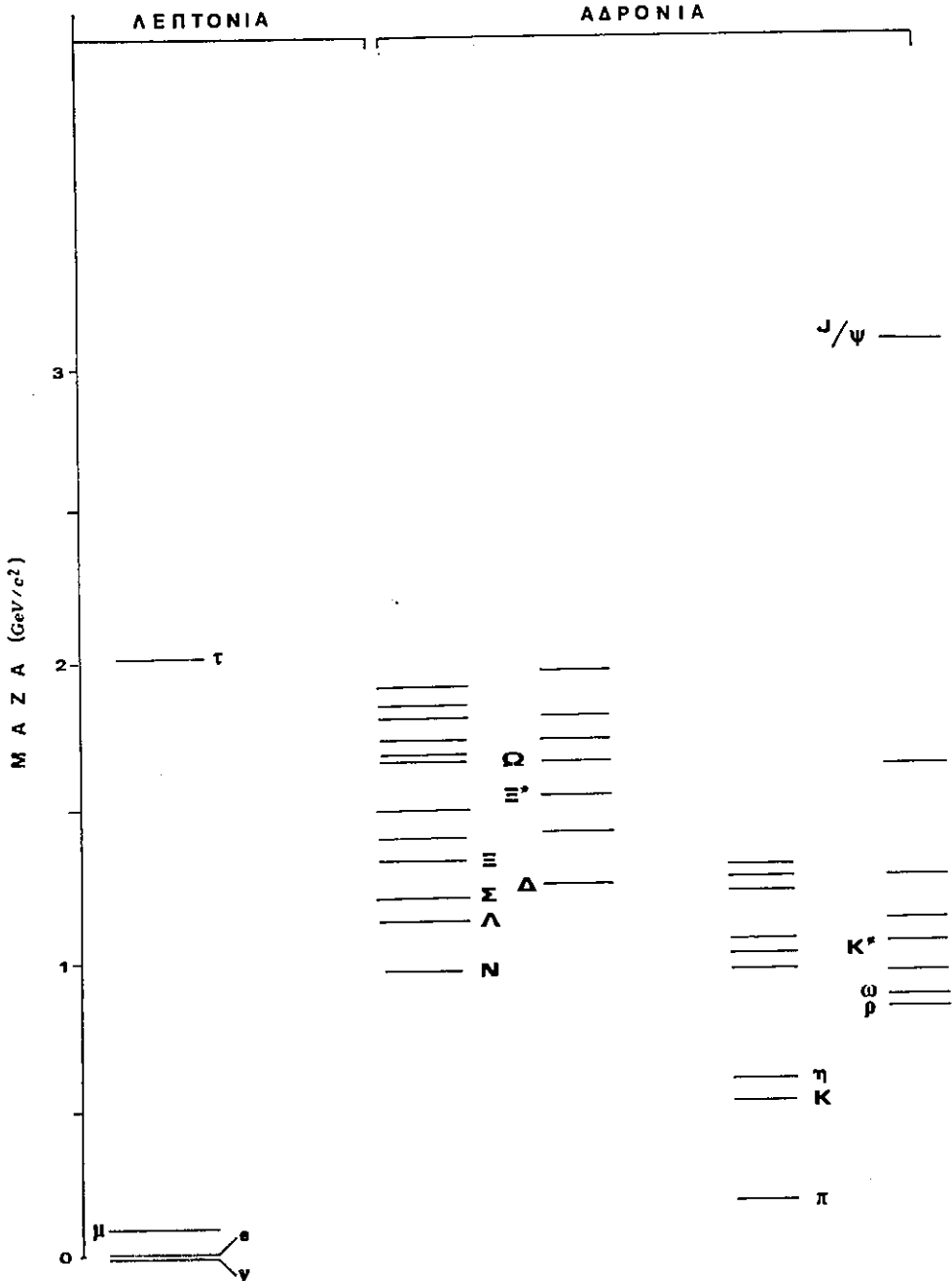
μας επιβάλλει για τη μελέτη των μικρών αποστάσεων να χρησιμοποιήσουμε υψηλές ορμές και ενέργειες. Ισοδύναμα η μελέτη της ύλης σε αποστάσεις τάξης μεγέθους  $R$ , μπορεί να γίνει μόνο με κυματική ακτινοβολία μήκους κύματος  $\lambda \approx R$ . Η αρχή του de Broglie μας επιτρέπει να συνάγουμε ότι η ορμή του υλοκύματος θα είναι  $p = 1/\lambda = 1/R$ . Έτσι οι ενέργειες στην Ατομική Φυσική είναι της τάξης του eV, στην Πυρηνική Φυσική της τάξης του MeV ( $M \equiv 10^6$ ) και στη ΦΥΕ της τάξης του GeV ( $G \equiv 10^9$ ).

Στις αρχές της δεκαετίας του 30 ξέραμε τα εξής σωματίδια: Πρωτόνιο (p), νετρόνιο (n), ηλεκτρόνιο ( $e^-$ ), φωτόνιο ( $\gamma$ ) και νετρίνο ( $\nu$ ). Το 1933 ανακαλύφθηκε το ποζιτρόνιο ( $e^+$ ) (Anderson, Blackett, Occhialini). Το ποζιτρόνιο προβλέφθηκε θεωρητικά από τον Dirac το 1928. Το 1937 - 1938 ανακαλύφθηκε το μεσόνιο  $\mu^+$  από τους Anderson - Nedder-

meyer ( $m_\mu \approx 200 m_e$ ). Το  $\mu^+$  ταυτίστηκε λανθασμένα με το πιόνιο  $\pi^+$  του Yukawa (δυνάμεις ανταλλαγής του Yukawa, 1935, θα αναφερθούμε λεπτομερέστερα στην ιδέα αυτή του Yukawa). Ήταν μόνο το 1947 που βρέθηκε πειραματικά (Conversi et al.) ότι το  $\mu^+$  δεν συμμετέχει στις ισχυρές αλληλεπιδράσεις και συνεπώς δεν μπορεί να είναι το μεσόνιο  $\pi^+$  του Yukawa. Το  $\mu$  είναι το πρώτο σωματίδιο που ανακαλύφθηκε χωρίς να προηγηθεί θεωρητική πρόβλεψη και η παρουσία του δεν πληρεί κάποιο θεωρητικό κενό. Εκτός από την μάζα του, είναι απολύτως ολόιδιο με το ηλεκτρόνιο  $e$  και μέχρι σήμερα κανένας δεν καταλαβαίνει ποιος ο λόγος να υπάρχει στη φύση ένα ακριβές αντίγραφο του  $e$ . Το πρόβλημα αυτό είναι ένα γενικότερο πρόβλημα στη ΦΥΕ και είναι γνωστό σαν πρόβλημα οικογενειών (family problem).

Λίγο αργότερα το 1947 ανακαλύφθηκε το  $\pi^+$  (Lattes et al.). Η σχετική αντίδραση ήταν  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$  ( $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$ ) και παρατηρήθηκε σε φωτογραφικά γαλακτώματα (emulsion) που εκτέθηκαν στις Άλλεις. Στις αρχές της δεκαετίας του 50 ανακαλύφθηκαν μία σειρά από ασταθή σωματίδια, τα υπερόνια (μάζα μεγαλύτερη από την μάζα του νουκλεονίου) π.χ.  $\Lambda$ ,  $\Sigma^+$  και τα μεσόνια (μάζα μεταξύ της μάζας του  $\pi$  και του  $p$ ) π.χ.  $K^0$ ,  $K^+$ . Θεωρητικό πρόβλημα: Γιατί παράγονται εν αφθονία (χαρακτηριστικό των ισχυρών αλληλεπιδράσεων) και έχουν χρόνο ημισείας ζωής μεγάλο (χαρακτηριστικό των ασθενών αλληλεπιδράσεων); Η απάντηση δόθηκε από τους Pais, Gell-Mann και Nishijima. Τα νέα σωματίδια φέρουν ένα νέο κβαντικό αριθμό, την παραδοξότητα  $S$  (strangeness) που διατηρούν οι ισχυρές αλληλεπιδράσεις αλλά παραβιάζουν οι ασθενείς αλληλεπιδράσεις. (Λεπτομέρειες αργότερα).

Το 1955 ανακαλύφθηκε το αντιπρωτόνιο  $\bar{p}$  (Chamberlain, Segre', Wiegand, Υψηλάντης). Το 1956 οι Lee - Yang πρότειναν ότι η αναστροφή του χώρου (parity) παραβιάζεται στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις. Το 1957 το πείραμα της Wu et al. επιβεβαίωσε την ιδέα τους. Το 1964 βρέθηκε το  $\Omega^-$  (Barnes et al.) με ιδιότητες (μάζα, spin, φορτίο) όπως αυτές είχαν προβλεφθεί από το μοντέλο των κουάρκ των M. Gell-Mann και Y. Ne'eman (1961). Το Νοέμβριο του 1974 ανακαλύφθηκε το  $J/\Psi$  από τους Ting et al και Richter et al. Το σωματίδιο αυτό περιέχει το τέταρτο κουάρκ, το  $c$  κουάρκ (charm) και η ύπαρξή του είχε προβλεφθεί το 1970 από τους S. Glashow - Γ. Ηλιόπουλο - L. Maiani. Τα επόμενα χρόνια ανακαλύφθηκε το λεπτόνιο  $\tau$  (1975) και το σωματίδιο  $Y$  (1977) που είναι μία δέσμια κατάσταση αποτελούμενη από το  $b$  κουάρκ. Το 1982 ανακαλύφθηκε το  $W^\pm$  και το 1983



ΦΑΣΜΑ ΜΑΖΩΝ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ

το  $Z^0$  στο συγκρουστήρα (collider)  $p\bar{p}$  στο CERN. Τα σωματίδια  $W^\pm$ ,  $Z^0$  είναι φορείς των ασθενών δυνάμεων. Για την ανακάλυψη αυτή ο C. Rubbia τιμήθηκε με το βραβείο Nobel το 1984. Οι μάζες των  $W$ ,  $Z$  συμφωνούν με τις θεωρητικές προβλέψεις του μοντέλου των ηλεκτροασθενών δυνάμεων των Glashow - Weinberg - Salam.

Η ιστορική αναδρομή της Φυσικής των Στοιχειωδών Σωματιδίων μας επιτρέπει να δούμε την αλληλοσυσχέτιση και την αλληλεπίδραση ανάμεσα στη θεωρία και στο πείραμα. Ορισμένες φορές είναι η θεωρία που προηγείται και μέσα από καινούργιες ιδέες ή μοντέλα καθοδηγεί το πείραμα. Άλλες φορές είναι το πείραμα που με την ανακάλυψη απρόσμενων πειραματικών δεδομένων υποδεικνύει τον δρόμο στη θεωρία. Την εποχή αυτή η λειτουργία των μηχανών LEP και TEVATRON αναμένεται να μας δώσει πληροφορίες για την δομή της ύλης σε ακόμα μικρότερες αποστάσεις, απροσπέλαστες μέχρι τώρα.

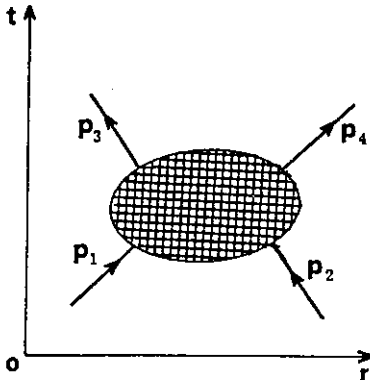
## 1.2. Αλληλεπιδράσεις

Αυτός ο κόσμος ο μικρός, ο μέγας  
Ο. Ελύτης

Τα στοιχειώδη σωματίδια αλληλεπιδρούν μεταξύ τους μέσω των εξής αλληλεπιδράσεων: βαρυτικές αλληλεπιδράσεις, ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις, ισχυρές αλληλεπιδράσεις και ασθενείς αλληλεπιδράσεις. Πιστεύουμε ότι και οι τέσσερις αλληλεπιδράσεις διαδίδονται μέσω του ίδιου μηχανισμού των δυνάμεων ανταλλαγής που πρώτος διατύπωσε ο Yukawa (1935).

### Μηχανισμός Yukawa

Ας θεωρήσουμε την σκέδαση δύο ηλεκτρονίων. Την χωροχρονική



Διάγραμμα Feynman για την χωροχρονική εξέλιξη της σκέδασης

εξέλιξη της σκέδασης μπορούμε να την παραστήσουμε μ' ένα διάγραμμα Feynman όπου άξονες συντεταγμένων είναι οι χωρικές συντεταγμένες (υποδηλούμενες συλλογικά με το  $r$ ) και ο χρόνος  $t$ . Ένα σωματίο κινούμενο με σταθερή ταχύτητα παριστάνεται στο διάγραμμα Feynman

με ευθεία γραμμή. Οι τέσσερις λοιπόν γραμμές που φαίνονται στο σχήμα είναι τα δύο ηλεκτρόνια πριν και μετά από την σκέδαση. Ο γραμμοσκιασμένος χώρος υποδηλώνει την άγνοιά μας για το πώς ακριβώς έγινε η σκέδαση. Η διατήρηση της ορμής και ενέργειας ισχύει συνολικά για το φαινόμενο της σκέδασης. Μ' άλλα λόγια έχουμε

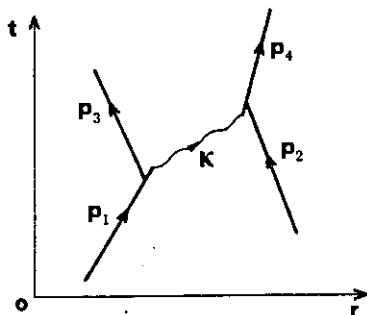
$$E_1 + E_2 = E_3 + E_4 \quad (1.2)$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4$$

Η ιδέα του Yukawa στηρίζεται στην κβαντική αντίληψη ότι για χρόνο  $\Delta t$  μπορούμε να έχουμε παραβίαση της αρχής της διατήρησης της ενέργειας κατά ποσότητα  $\Delta E$ , εφ' όσον

$$\Delta E \Delta t \leq \hbar \quad (1.3)$$

Μια παραβίαση της αρχής της διατήρησης της ενέργειας που υπακούει στη σχέση (1.3), σύμφωνα με τις αρχές της κβαντικής μηχανικής, είναι αδύνατο να γίνει αντιληπτή. Ο Yukawa πρότεινε ότι το ηλεκτρόνιο, παραβιάζοντας την διατήρηση της ενέργειας κατά  $\Delta E$ , εκπέμπει ένα σωματίδιο (στην περίπτωσή μας ένα φωτόνιο) που διαδίδεται για χρονικό διάστημα  $\Delta t$  και ύστερα απορροφάται από το άλλο ηλεκτρόνιο. Το σωματίδιο αυτό, επειδή είναι αδύνατο να ανιχνευθεί πειραματικά ονομάζεται δυνη-



Η σκέδαση κατά Yukawa

τικό (virtual) σωματίδιο. Παρατηρούμε ότι η αρχή της διατήρησης της ενέργειας παραβιάζεται στις δύο κορυφές (vertex) αλλά ισχύει συνολικά για την σκέδαση.

Ισοδύναμα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η διατήρηση της ενέργειας ισχύει και στις κορυφές αλλά η γνωστή σχέση του Einstein\* ( $E^2 = p^2 + m^2$ ) δεν ισχύει για το δυνητικό σωματίδιο που

\* Χρησιμοποιούμε μονάδες όπου  $\hbar = c = 1$  (βλ. πιο κάτω το σύστημα μονάδων).

διαδίδει την αλληλεπίδραση. Ορίζοντας δηλαδή

$$E = E_1 - E_3$$

$$\vec{k} = \vec{p}_1 - \vec{p}_3$$
(1.4)

έχουμε

$$E^2 - \vec{k}^2 \neq m^2$$
(1.5)

όπου  $m$  είναι η μάζα του σωματιδίου. Ορίζουμε όμως την δυνητική μάζα  $M_V$  μέσα από τη σχέση

$$E^2 - \vec{k}^2 = M_V^2$$
(1.6)

Η δυνητική μάζα είναι μεταβλητή, καθοριζόμενη από την κινηματική, και προφανώς δεν ταυτίζεται με την πραγματική μάζα  $m$ . Μπορούμε συνεπώς να παραμείνουμε πιστοί στην προσφιλή αρχή μας της διατήρησης της ενέργειας και να δούμε τον μηχανισμό του Yukawa σαν την διάδοση δυνητικών σωματιδίων με μεταβλητή μάζα  $M_V$  (δυνητική μάζα) που καθορίζεται από τις εξωτερικές κινηματικές συνθήκες.

Για ένα δυνητικό σωματίδιο μάζης  $m$  έχουμε

$$\Delta E \geq mc^2$$
(1.7)

Από τη σχέση (1.3) βρίσκουμε

$$\Delta t \approx \frac{\hbar}{mc^2}$$
(1.8)

Σε χρόνο  $\Delta t$  το δυνητικό σωματίδιο θα καλύψει μιά απόσταση

$$R = c\Delta t \approx \frac{\hbar}{mc}$$
(1.9)

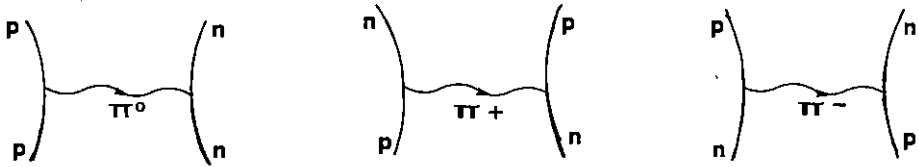
Το μήκος αυτό, γνωστό σαν μήκος κύματος Compton, χαρακτηρίζει την εμβέλεια των δυνάμεων. Οι δυνάμεις που διαδίδονται μέσω σωματιδίων μηδενικής μάζας έχουν άπειρη εμβέλεια (ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις) ενώ οι δυνάμεις που διαδίδονται μέσω σωματιδίων που έχουν μάζα έχουν πεπερασμένη εμβέλεια (πυρηνικές δυνάμεις, ασθενείς δυνάμεις).

Ο συνδυασμός της κβαντικής θεωρίας και της θεωρίας της σχετικότητας μας οδήγησε σε μια θεώρηση όπου οι αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στα στοιχειώδη σωματίδια διαμεσολαβούνται, μέσα από ανταλλαγή (άλλων) σωματιδίων. Από την κλασσική θεωρία πεδίου γνωρίζουμε ότι ένα

φορτισμένο σωματίδιο που κινείται δημιουργεί πεδία (π.χ. ηλεκτρικό, μαγνητικό πεδίο) που μεταφέρουν ενέργεια και επεκτείνονται σ'όλο τον περιβάλλοντα χώρο. Ενδεχόμενα τα πεδία αυτά αλληλεπιδρούν με άλλα σωματίδια. Εξαιτίας τώρα της κβαντικής θεωρίας, η ενέργεια (και ίσως άλλοι κβαντικοί αριθμοί) μεταφέρεται από διακριτά κβάντα, τα οποία ταυτίζονται με τα σωματίδια που διαδίδουν την αλληλεπίδραση.

Ιστορικά ο Yukawa εφάρμοσε την ιδέα του πάνω στις πυρηνικές δυνάμεις. Παρατήρησε ότι οι πυρηνικές δυνάμεις έχουν μικρή εμβέλεια της τάξης  $R_{\text{nucl}} \approx 1.4 \text{ fm}$  ( $1 \text{ fm} = 10^{-13} \text{ cm}$ ). Υπέθεσε ότι υπάρχει ένα σωματίδιο, το πιόνιο ( $\pi^+$ ,  $\pi^-$ ,  $\pi^0$ ) που μεταφέρει τις πυρηνικές δυνάμεις με μάζα  $m_\pi = \frac{\hbar}{Rc} \approx 140 \text{ MeV}$ . (1.8)

Το πιόνιο ανακαλύφτηκε το 1947 αφού προηγουμένως ταυτίστηκε λανθασμένα το μόνιο  $\mu$  σαν πιόνιο.



Ανταλλαγή πιονίων μεταξύ πρωτονίου και νετρονίου

### ι) Ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις

Κλασσικά οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις περιγράφονται από τις εξισώσεις Maxwell. Σε κβαντικό επίπεδο οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις περιγράφονται από την Κβαντική Ηλεκτροδυναμική (QED). Η Κβαντική Ηλεκτροδυναμική είναι δημιούργημα κυρίως των Feynman, Schwinger, Tomonaga (1948) και αποτελεί την πιο ακριβή και αξιόπιστη θεωρία που διαθέτουμε. Επιπλέον η QED αποτελεί το πρότυπο για την κατασκευή άλλων θεωρητικών μοντέλων. Χαρακτηριστικά για την ακρίβεια των προβλέψεων της QED αναφέρουμε την μαγνητική διπολική ροπή του μιονίου  $\mu$ . Γενικά η μαγνητική διπολική ροπή  $\vec{\mu}$  δίνεται από τη σχέση

$$\vec{\mu} = g\mu_B \vec{S} \quad (1.10)$$



όπου  $\vec{S}$  είναι το σπιν,  $\mu_B$  η μαγνητόνη του Bohr και  $g$  ο παράγοντας Lande'. Ο παράγοντας  $g$  είναι κοντά στο δύο και η θεωρία δίνει

$$\frac{g}{2} = 1.001\,159\,652\,38 \pm 0.000\,000\,000\,26 \quad (1.11)$$

όπου ο δεύτερος αριθμός δίνει την θεωρητική αβεβαιότητα. Πειραματικά βρίσκουμε

$$\frac{g}{2} = 1.001\,159\,652\,41 \pm 0.000\,000\,000\,20 \quad (1.12)$$

όπου ο δεύτερος αριθμός δίνει το πειραματικό σφάλμα. Παρατηρούμε ότι η συμφωνία ανάμεσα στη θεωρία και στο πείραμα φτάνει μέχρι το ένατο δεκαδικό ψηφίο! Μια άλλη σημαντική επαλήθευση της QED είναι η διαφορά ενέργειας ανάμεσα σε δύο στάθμες του ατόμου του υδρογόνου, την  $2S_{1/2}$  και την  $2P_{1/2}$  γνωστή σαν μετατόπιση Lamb (Lamb shift). Οι δύο αυτές στάθμες, σύμφωνα με την εξίσωση του Dirac, έπρεπε να ήταν εκφυλισμένες αλλά ένα καθαρά κβαντικό φαινόμενο (ή πόλωση του κενού) αίρει τον εκφυλισμό. Σύμφωνα με την θεωρία η ενεργειακή διαφορά, εκφρασμένη σε διαφορά στις συχνότητες είναι

$$\Delta\nu (2S_{1/2} - 2P_{1/2}) = 1057.864 \text{ (14) MHz} \quad (1.13)$$

ενώ το πείραμα δίνει

$$\Delta\nu (2S_{1/2} - 2P_{1/2}) = 1057.862 \text{ (20) MHz} \quad (1.14)$$

Σε παρένθεση δίνεται η θεωρητική αβεβαιότητα ή το πειραματικό σφάλμα.

Οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις διαδίδονται μέσω των φωτονίων, που είναι σωματίδια μηδενικής μάζας και έχουν σπιν ένα. Ανάμεσα σε δύο σημειακά φορτισμένα σωματίδια οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις είναι δυνάμεις Coulomb ( $V(r) \sim 1/r$ ). Ανάμεσα σε δύο ουδέτερα σωματίδια (που έχουν όμως μια κατανομή φορτίου) οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις είναι διπολικής φύσης και είναι γνωστές σαν δυνάμεις Van der Waals. Η ένταση των ηλεκτρομαγνητικών δυνάμεων χαρακτηρίζεται από την σταθερά λεπτής υφής  $\alpha$ .

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \frac{1}{137} \quad (1.15)$$

όπου  $e$  είναι το ηλεκτρικό φορτίο του ηλεκτρονίου. Η σταθερά λεπτής υψής είναι αδιάστατος αριθμός.

### ii) Βαρυτικές αλληλεπιδράσεις

Οι βαρυτικές δυνάμεις είναι και αυτές δυνάμεις άπειρης εμβέλειας (όπως και οι ηλεκτρομαγνητικές) και μας είναι εξαιρετικά οικείες (κίνηση πλανητών γύρω από τον ήλιο, πτώση μήλων...). Σε κλασσικό επίπεδο η βαρύτητα περιγράφεται από την Γενική Θεωρία της Σχετικότητας (ΓΘΣ) του Einstein (για ασθενή βαρυτικά πεδία η ΓΘΣ ανάγεται στις εξισώσεις του Νεύτωνα). Δεν έχουμε πετύχει ακόμη την κβάντωση της βαρύτητας.

Οι βαρυτικές δυνάμεις διαδίδονται μέσω του βαρυτονίου (graviton). Το βαρυτόνιο συζεύγνυται μ' όλα τα σωματίδια που έχουν μάζα ή μεταφέρουν ενέργεια, όπως το φωτόνιο συζεύγνυται μ' όλα τα σωματίδια που έχουν ηλεκτρικό φορτίο. Έχει μηδενική μάζα και σπιν δύο με αποτέλεσμα οι βαρυτικές δυνάμεις να είναι αποκλειστικά ελκτικές. Αν ορίσουμε μία σταθερά  $\alpha_G$  για τη βαρύτητα, ανάλογη της σταθεράς λεπτής υψής των ηλεκτρομαγνητικών δυνάμεων, βρίσκουμε ότι

$$\alpha_G \approx 10^{-40} \quad (1.16)$$

Συμπεραίνουμε ότι οι δυνάμεις βαρύτητας είναι αμελητέες για τα στοιχειώδη σωματίδια και θα τις αγνοήσουμε στα περαιτέρω. Η βαρύτητα είναι σημαντική μόνο για τεράστιες μάζες, της τάξης της μάζας του Planck  $M_p \approx 10^{19}$  GeV.

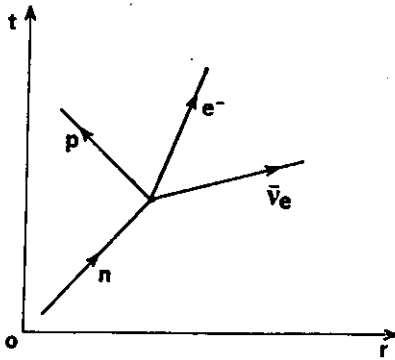
### iii) Ασθενείς αλληλεπιδράσεις

Οι ασθενείς δυνάμεις είναι υπεύθυνες για τη  $\beta$ - διάσπαση

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (1.17)$$

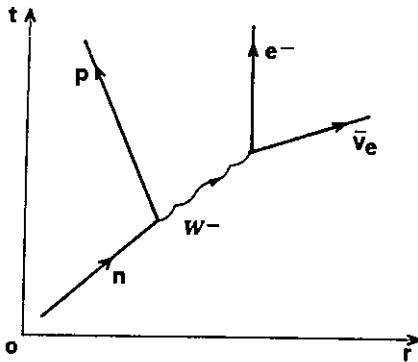
και για φαινόμενα όπως η σύντηξη στο εσωτερικό του ήλιου με αποτέλεσμα την έκλυση της ηλιακής ενέργειας.

Το αρχικό μοντέλο για τις ασθενείς αλληλεπιδράσεις το οφείλουμε



Η β - διασπάση κατά Fermi

στο μοντέλο των Glashow - Weinberg - Salam (GWS), είναι ότι οι ασθενείς δυνάμεις διαδίδονται μέσω μποζονίων βαθμίδας (gauge boson).



Η β - διάσπαση σύμφωνα με τους GWS

στον Fermi (1934). Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό οι ασθενείς δυνάμεις είναι δυνάμεις επαφής, δηλαδή τα τέσσερα σωματίδια που συμμετέχουν στην αντίδραση αλληλεπιδρούν μεταξύ τους στο ίδιο σημείο του χωρόχρονου και έτσι δεν χρειάζεται κάποιος μεσάζοντας (βλ. το αντίστοιχο διάγραμμα Feynman). Η τωρινή μας αντίληψη, στηριγμένη

Έτσι η β-διάσπαση παριστάνεται από το παρακείμενο διάγραμμα Feynman όπου το σωματίδιο  $W^-$  είναι ο φορέας των ασθενών δυνάμεων. Πέρα από τα σωματίδια  $W^\pm$ , το μοντέλο των GWS προβλέπει και την ύπαρξη του ουδέτερου μποζονίου βαθμίδας  $Z^0$ . Τα ουδέτερα ασθενή ρεύματα που οφείλονται στο  $Z^0$ , παρατη-

ρήθηκαν για πρώτη φορά το 1973 στο CERN. Τα σωματίδια  $W^\pm$ ,  $Z^0$  ανακαλύφθηκαν και πειραματικά πρόσφατα στον συγκρουστήρα  $p\bar{p}$  του CERN. Οι μάζες τους είναι περίπου  $m_W \approx 83 \text{ GeV}$  και  $m_Z \approx 95 \text{ GeV}$ .

Λόγω της μεγάλης μάζας των φορέων των ασθενών δυνάμεων, η εμβέλεια των ασθενών αλληλεπιδράσεων είναι εξαιρετικά μικρή ( $R_W \approx 10^{-16} \text{ cm}$ ). Γι' αυτό στις σχετικά χαμηλές ενέργειες ( $E \ll m_W$ ) το μοντέλο Fermi, μοντέλο με μηδενική εμβέλεια, είναι μια σωστή προσέγγιση. Η φαινομενική «ασθενικότητα» στην ένταση των ασθενών δυνάμεων, οφείλεται στο γεγονός ότι όλα τα πειράματα μέχρι τώρα έχουν γίνει σε σχετικά χαμηλές ενέργειες, δηλαδή ανιχνεύοντας αποστάσεις

μεγαλύτερες από την εμβέλεια. Ένα πείραμα που θα γίνει σε υψηλές ενέργειες ( $E \gg m_w$ ) θα ανιχνεύσει αποστάσεις μικρότερες της εμβέλειας των ασθενών δυνάμεων και θα δώσει το πραγματικό μέτρο της έντασης των ασθενών δυνάμεων. Ορίζοντας

$$\alpha_w = \frac{g_w^2}{4\pi\hbar c} \quad (1.18)$$

όπου  $g_w$  είναι το «ασθενές φορτίο» βρίσκουμε  $\alpha_w \approx 0.1$ . Συνεπώς στις υψηλές ενέργειες οι ασθενείς δυνάμεις θα είναι ισχυρότερες των ηλεκτρομαγνητικών. Οι ασθενείς δυνάμεις παραβιάζουν πολλές συμμετρίες (βλ. οικείο κεφάλαιο).

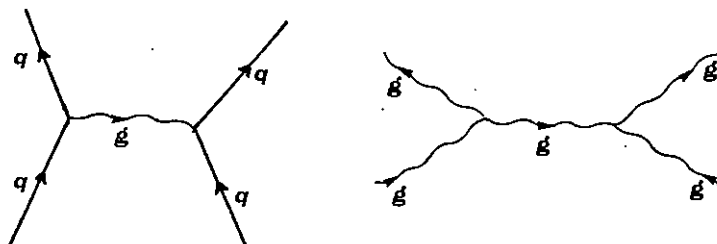
#### iv) Ισχυρές αλληλεπιδράσεις

Σαν πυρηνικές δυνάμεις χαρακτηρίζονται οι δυνάμεις που δρουν ανάμεσα στα αδρόνια (νουκλεόνια, πόνια κτλ.). Βάθρο της θεωρίας των πυρηνικών δυνάμεων είναι οι δυνάμεις ανταλλαγής του Yukawa, η ανταλλαγή δηλαδή πιονίων ανάμεσα στα νουκλεόνια. Στις αρχές της δεκαετίας του 60 ο αριθμός των γνωστών αδρονίων ήταν σημαντικά μεγάλος. Τα πειράματα της βαθιάς ανελαστικής σκέδασης (deep inelastic scattering) που έγιναν στο SLAC (Stanford) και η ανακάλυψη συμμετριών ανάμεσα στα αδρόνια, υπέδειξαν ότι τα αδρόνια είναι σύνθετα σωματίδια, αποτελούμενα από άλλα σωματίδια, γνωστά σαν κουάρκς (quarks).

Τα κουάρκς φέρουν ένα μη αβελιανό «ισχυρό φορτίο», το χρώμα (color). Όπως τα φωτόνια συζεύγγονται στο ηλεκτρικό φορτίο, παρόμοια έχουμε μποζόνια βαθμίδας, τα γκλουόνια (gluons), που συζεύγγονται στο χρώμα. Η ισχυρή αλληλεπίδραση ανάμεσα στα κουάρκς και τα γκλουόνια περιγράφεται από την Κβαντική Χρωμοδυναμική (QCD). Η QCD μοιάζει σε μεγάλο βαθμό με την QED. Από την άλλη μεριά υπάρχει μία σημαντική διαφορά: τα γκλουόνια είναι «φορτισμένα» και φέρουν χρώμα (σε αντίθεση με τα φωτόνια που είναι ηλεκτρικά ουδέτερα). Έτσι τα γκλουόνια συζεύγγονται μεταξύ τους και μπορούμε να έχουμε σκέδαση γκλουονίων, όπως φαίνεται στο διάγραμμα.

Η ύπαρξη σύζευξης τριών γκλουονίων μας οδηγεί σε δύο σπουδαία φαινόμενα:

- α) ασυμπτωτική ελευθερία (asymptotic freedom)
- β) εγκλωβισμό του χρώματος (color confinement)

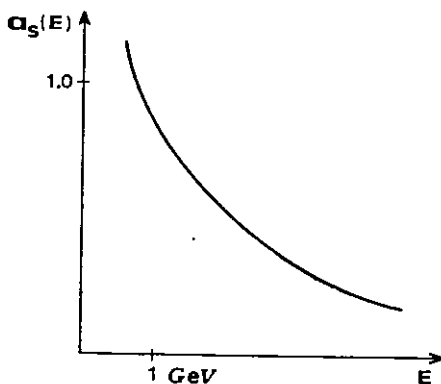


Σκέδαση κουάρκς και γκλουονίων

Στη Κβαντική Θεωρία Πεδίου, η σταθερά σύζευξης, λόγω της πόλωσης του κενού, αποκτά μία εξάρτηση από την ενέργεια:

$$\alpha_s(E) = \frac{g^2(E)}{4\pi\hbar c} \quad (1.19)$$

όπου  $g$  το ισχυρό φορτίο. Η εξάρτηση αυτή στην περίπτωση της QCD, φαίνεται στο σχήμα. Παρατηρούμε ότι η τρέχουσα σταθερά σύζευξης (running coupling constant) είναι μικρή στις μεγάλες ενέργειες (ή ισοδύναμα στις μικρές αποστάσεις) με αποτέλεσμα τα κουάρκς και τα γκλουόνια να αλληλεπιδρούν ασθενώς μεταξύ τους και να συμπεριφέρονται ασυμπτωτικώς ελεύθερα όσο αυξάνει η ενέργεια σ' ένα πείραμα σκέδασης. Αντίθετα στις χαμηλές ενέργειες η σταθερά σύζευξης είναι μεγάλη με αποτέλεσμα να αναπτύσσονται εξαιρετικά μεγάλες δυνάμεις ανάμεσα στα σωματίδια που φέρουν χρώμα (κουάρκς, γκλουόνια). Οι εξαιρετικά μεγάλες αυτές δυνάμεις εγκλωβίζουν το χρώμα, μέσα σε «άχρωμες» καταστάσεις, τα γνωστά μας αδρόνια. Τα αδρόνια, έχοντας



Η τρέχουσα σταθερά σύζευξης σαν συνάρτηση της ενέργειας

ολικό χρώμα μηδέν μοιάζουν με τα ηλεκτρικώς ουδέτερα άτομα της χημείας και μπορούμε να θεωρήσουμε τις πυρηνικές δυνάμεις ανάμεσα στα αδρόνια σαν δυνάμεις Van der Waals των ισχυρών δυνάμεων ανάμεσα στα κουάρκς.

### 1.3. Αριθμολογία

Τα σωματίδια που δεν μετέχουν στις ισχυρές δυνάμεις ονομάζονται λεπτόνια. Λεπτόνια είναι το  $e$ ,  $\mu$ ,  $\tau$  και τα νετρίνα που τα συνοδεύουν ( $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$ ,  $\nu_\tau$ ). Αδρόνια ονομάζουμε τα σωματίδια που συμμετέχουν στις ισχυρές αλληλεπιδράσεις. Τα χωρίζουμε σε δύο μεγάλες ομάδες: τα βαρυόνια, που είναι τα αδρόνια με ημιακέραιο σπιν, όπως π.χ. το  $p$ ,  $n$ ,  $\Lambda$ ,  $\Sigma$ ,  $\Omega^-$  και τα μεσόνια που είναι τα αδρόνια με ακέραιο σπιν, όπως το  $\pi$ ,  $\rho$ ,  $\omega$ ,  $K$ ,  $\phi$ ,  $Y$  κλπ. Έχουμε επίσης και τα μποζόνια βαθμίδας που είναι φορείς των δυνάμεων, δηλαδή το  $\gamma$ ,  $g$ ,  $W^\pm$ ,  $Z^0$ . Στον επόμενο πίνακα συνοψίζουμε τα κύρια χαρακτηριστικά των αλληλεπιδράσεων.

Γνωρίζουμε ότι οι διαστάσεις της ενεργού διατομής είναι διαστάσεις επιφάνειας [ $L^2$ ]. Αν σε μία σκέδαση πρωτονίου-πρωτονίου το μόνο μήκος που υπεισέρχεται είναι η ακτίνα του πρωτονίου  $R_p$ , τότε αναμένουμε η ενεργός διατομή  $\sigma$  να είναι της τάξης μεγέθους του  $\pi R_p^2$ . Παιρνοντας υπόψη ότι  $R_p = 10^{-13}$  cm βρίσκουμε ότι  $\sigma = 30 \cdot 10^{-27}$  cm<sup>2</sup> = 30 mb. Αυτή είναι και η τάξη μεγέθους όλων των ενεργών διατομών που λαμβάνουν χώρα μέσα από τις ισχυρές δυνάμεις. Μπορούμε να ορίσουμε τον χαρακτηριστικό χρόνο των ισχυρών δυνάμεων μέσα από την

Αλληλεπιδράσεις	Ισχύς	Φορέας	Εμβέλεια	Δρουν πάνω
Ισχυρές	1	$g$	$10^{-13}$ cm	στα αδρόνια
Ηλεκτρομαγνητικές	$10^{-2}$	$\gamma$	$\infty$	στα ηλεκτρικά φορτισμένα σωματίδια
Ασθενείς	$10^{-12}$	$W^\pm$ $Z^0$	$10^{-16}$ cm	στα λεπτόνια, αδρόνια
Βαρυτικές	$10^{-37}$	$G$	$\infty$	σ' όλα τα σωματίδια

σχέση  $\tau_{str} = R_p/c \approx 10^{-23}$  sec. Ο χαρακτηριστικός χρόνος των ηλεκτρομαγνητικών δυνάμεων  $\tau_{el}$  είναι  $\tau_{el} \approx 10^{-16}$ , ενώ ο χαρακτηριστικός χρόνος των ασθενών δυνάμεων  $\tau_w$  είναι  $\tau_w \approx 10^{-8} - 10^{-10}$  sec. Η χρονική διάρκεια μιας αντίδρασης ή μιας διάσπασης που λαμβάνει χώρα μέσα από μία ορισμένη αλληλεπίδραση καθορίζεται από τον αντίστοιχο χαρακτηριστικό χρόνο. Επίσης οι ενεργές διατομές των ηλεκτρομαγνητικών δυνάμεων είναι της τάξης των 100 μb ενώ των ασθενών είναι της τάξης των  $10^{-8}$  μb.

#### 1.4. Σύστημα Μονάδων

Σαν μέτρο αποστάσεων στον μικρόκοσμο χρησιμοποιούμε το fermi (fm),  $1\text{fm} = 10^{-13}$  cm. Για μονάδα επιφάνειας και ενεργού διατομής, πέρα από το  $\text{cm}^2$ , χρησιμοποιούμε επίσης το barn (b),  $1\text{b} = 10^{-24}$   $\text{cm}^2$ .

Επειδή οι εξισώσεις μας βρίθουν από τις σταθερές  $\hbar$  και  $c$

$$\hbar = 6.58 \times 10^{-22} \text{ MeV sec}$$

$$c = 3 \times 10^{10} \text{ cm sec}^{-1}$$

εισάγουμε ένα νέο σύστημα μονάδων στο οποίο οι σταθερές  $\hbar$  και  $c$  είναι **αδιάστατα** μεγέθη και ίσα με την μονάδα. Στο σύστημα αυτό μονάδων ο χρόνος και το μήκος έχουν τις ίδιες διαστάσεις. Οι διαστάσεις επίσης της μάζας, ορμής και ενέργειας είναι ίδιες, αλλά αντίστροφες του μήκους. Συνολικά έχουμε

$$[M] = [P] = [E] = [L]^{-1} = [T]^{-1}$$

Παίρνοντας υπόψη τις αριθμητικές τιμές των  $\hbar$  και  $c$  βρίσκουμε

$$\hbar c = 1 = 197.328 \text{ MeV fm}$$

Η σχέση αυτή μας επιτρέπει από μονάδες ενέργειας να μεταπηδάμε σε μονάδες μήκους. Ισχύει επίσης η σχέση  $1 \text{ GeV}^{-2} = 0.38939 \text{ mb}$ .

**Εφαρμογή:** Μιά αλληλεπίδραση διαδίδεται από ένα σωματίδιο μάζης  $M = 19.7 \text{ GeV}$ . Ποιά είναι η εμβέλεια της αλληλεπίδρασης;

$$R = \frac{1}{M} = \frac{1}{19.7 \text{ GeV}} = \frac{197 \text{ MeV fm}}{19.7 \cdot 10^3 \text{ MeV}} = 10^{-2} \text{ fm} = 10^{-15} \text{ cm}.$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1<sup>ο</sup>)

- 1) Αποδείξτε την σχέση (1.7)
- 2) Κατά καιρούς εμφανίζονται δημοσιεύματα για μία πέμπτη δύναμη έμβλειας 200m. Ποιά είναι η μάζα του σωματιδίου που διαδίδει την πέμπτη αυτή αλληλεπίδραση;
- 3) Γιατί οι βαρυτικές δυνάμεις είναι ιδιαίτερα αισθητές (σε σύγκριση με τις ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις που έχουν την ίδια άπειρη εμβέλεια) τη στιγμή που η έντασή τους είναι εξαιρετικά μικρή;
- 4) Βρείτε την σχέση που συνδέει την μάζα του Planck  $M_p$  με την σταθερά του Νεύτωνα  $G_N$ . Μέχρι ποιές αποστάσεις μπορούμε να αγνοήσουμε την βαρύτητα;
- 5) Γράψτε την εξίσωση στην οποία υπακούει η κυματοσυνάρτηση  $\phi(x)$  που περιγράφει ένα σχετικιστικό ελεύθερο βαθμωτό (σπιν μηδέν) σωματίδιο (εξίσωση Klein - Gordon). Στη συνέχεια θεωρήστε τη σύζευξη του πεδίου  $\phi(x)$  με μία κατανομή «ισχυρού φορτίου»  $\rho(\vec{x})$  (κατ' αναλογία της σύζευξης του φωτονίου με το ηλεκτρικό φορτίο) και βρείτε την λύση για το αλληλεπιδρών πεδίο  $\phi$ .
- 6) Στηριγμένοι στα αποτελέσματα της άσκησης 5, καθορίστε τη σχέση που συνδέει την σταθερά Fermi  $G_F$  με την μάζα του σωματιδίου  $W$ .
- 7) Αν  $\sigma_w$  ( $\sigma_\gamma$ ) είναι η ενεργός διατομή μιάς σκέδασης που λαμβάνει χώρα μέσω ανταλλαγής του  $W$  ( $\gamma$ ), βρείτε την εξάρτηση του λόγου  $\sigma_w/\sigma_\gamma$  από την μεταβλητή  $q$  ( $q$  είναι η μεταβίβαση ορμής από το ένα σωματίδιο στο άλλο).



- 8) Στο σύστημα μονάδων όπου  $\hbar = c = 1$  βρείτε τις διαστάσεις του ηλεκτρικού πεδίου  $\vec{E}$ , του μαγνητικού πεδίου  $\vec{B}$ , του διανυσματικού δυναμικού  $\vec{A}$ , του βαθμωτού δυναμικού  $\phi$  και της σταθεράς του Νεύτωνα  $G_N$ .
- 9) Με βάση την διαστασιακή ανάλυση βρείτε την εξάρτηση της ενεργού διατομής  $\sigma(E)$  από την ενέργεια  $E$ , για μια σκέδαση όπου δεν συναντάται κανένα εσώτερο διαστασιακό μέγεθος (όπως π.χ. μάζα ή μήκος).
- 10) Για ένα χρόνο ημισείας ζωής  $\tau = 1 \text{ GeV}^{-1}$  βρείτε το  $\tau$  σε δευτερόλεπτα. Ποιά είναι η τιμή της σταθεράς του Νεύτωνα  $G_N$  στο φυσικό σύστημα μονάδων που επιλέξαμε;



# 2

## ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

Η κίνηση είναι η αντιθετική ενότητα  
του όντος και του μηδενός, το γίνεσθαι.  
Hegel

### 2.1. Σχετικιστική κινήματική

Η έννοια του χώρου και η έννοια  
του χρόνου είναι ένα από τα σκοι-  
νιά που απλώνουμε την μπουγάδα  
της σκέψης μας να στεγνώσει.

Χρόνης Μπότσογλου

Τα σωματίδια, επιταχυνόμενα σε υψηλές ενέργειες, αποκτούν ταχύτητες που πλησιάζουν την ταχύτητα του φωτός  $c$ . Στις μεγάλες αυτές ταχύτητες, η Κλασσική Μηχανική παύει να αποτελεί μία καλή προσέγγιση, και χρησιμοποιούμε την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας (ΕΘΣ). Επίσης στα διάφορα πειράματα παρατηρούμε την συνεχή αλληλομετατροπή της ύλης σε ενέργεια, που είναι ένα κατ'εξοχήν σχετικιστικό φαινόμενο. Στα επόμενα θα υπενθυμίσουμε τις γενικές αρχές της ΕΘΣ και θα σταθούμε σε εφαρμογές της Σχετικιστικής Κινήματικής.

Ενώ στα πλαίσια της Κλασσικής Μηχανικής ο χρόνος έχει μία απόλυτη έννοια, στην ΕΘΣ έχουμε την ενοποίηση του χώρου και του χρόνου σε ένα ενιαίο χωροχρονικό συνεχές. Επιπλέον στην ΕΘΣ η ταχύτητα του φωτός  $c$  έχει μία ιδιάζουσα βαρύτητα, είναι ή ίδια για όλα τα συστήματα αναφοράς. Εάν ένα «γεγονός» χαρακτηρίζεται σε ένα αδρανειακό σύστημα από τις συντεταγμένες  $P = [x, y, z, t]$ , σε ένα άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς χαρακτηρίζεται από τις χωροχρονικές συντεταγμένες  $P' = [x', y', z', t']$ . Ο μετασχηματισμός Lorentz μας

επιτρέπει να συνδέσουμε το ένα σύνολο συντεταγμένων με το άλλο.

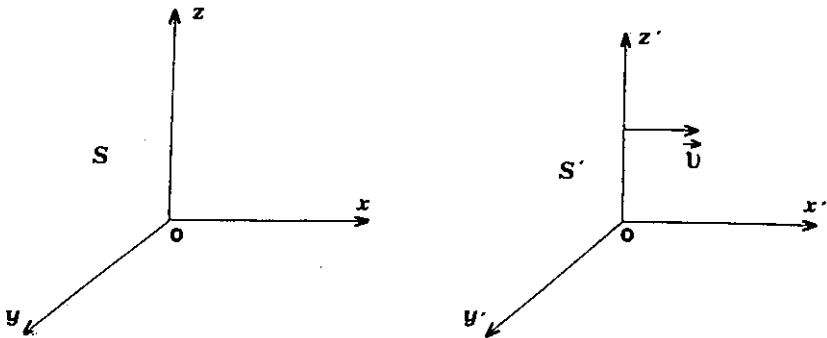
Αν υποθέσουμε ότι το αδρανειακό σύστημα αναφοράς  $S'$  κινείται ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς  $S$  με σταθερή ταχύτητα  $\vec{v}$  κατά μήκος του άξονα  $x$  και ότι οι αρχές των αξόνων συμπίπτουν την χρονική στιγμή  $t = t' = 0$ , τότε ο μετασχηματισμός Lorentz μας δίνει

$$\begin{aligned} x' &= \gamma (x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma \left( t - \frac{v}{c^2} x \right) \quad \gamma = \left[ 1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2 \right]^{-1/2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Lorentz βρίσκεται αν αλλάξουμε το πρόσημο της ταχύτητας  $v$ .

Με τον ίδιο τρόπο που οι χωρικές συντεταγμένες και ο χρόνος αποτελούν τις συνιστώσες ενός τετραδιάστατου διανύσματος  $r(t, \vec{r})$ , η ορμή και η ενέργεια αποτελούν τις συνιστώσες ενός άλλου τετραδιάστατου διανύσματος  $p(E, \vec{p})$ . Ο μετασχηματισμός Lorentz στην περίπτωση αυτή δίνει

$$\begin{aligned} p'_x &= \gamma \left( p_x - \frac{v}{c^2} E \right) \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= p_z \\ E' &= \gamma (E - vp_x) \end{aligned} \quad (2.2)$$



Όταν πραγματοποιούμε μία στροφή στον συνηθισμένο τρισδιάστατο χώρο, οι συντεταγμένες  $x$ ,  $y$ ,  $z$  αλλάζουν αλλά το μήκος  $d = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$  παραμένει αναλλοίωτο. Γενικότερα κάτω από τις στροφές ενώ τα διανύσματα αλλάζουν το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων ( $\vec{a} \cdot \vec{b} =$

$\Sigma$   $\alpha_i, \beta_j$ ) παραμένει αναλλοίωτο. Ανάλογα, μπορούμε να δούμε τους μετασχηματισμούς Lorentz, σαν μετασχηματισμούς που επιδρούν σε τετραδιάστατα διανύσματα που ανήκουν στο χώρο του Minkowski. Ο χώρος του Minkowski χαρακτηρίζεται από ένα μετρικό τανυστή  $g_{\mu\nu}$ :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Το εσωτερικό γινόμενο δύο τετραδιάστατων διανυσμάτων στο χώρο του Minkowski ορίζεται από τη σχέση

$$a \cdot b = \Sigma g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$$

όπου  $a^0$  είναι η χρονική συντεταγμένη και  $\vec{a}$  οι χωρικές συντεταγμένες του τετραδιανύσματος  $a$ . Κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz, τα τετραδιανύσματα  $a, b$  αλλάζουν σύμφωνα με τις εξισώσεις (2.1) ή (2.2) αλλά το εσωτερικό γινόμενο  $a \cdot b$  παραμένει αναλλοίωτο. Συμπεραίνουμε ότι ποσότητες όπως

$$dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = ds^2 \quad (2.4)$$

$$E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \quad (2.5)$$

παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz, δηλαδή έχουν την ίδια τιμή σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

**Εφαρμογή:** Ένα στοιχειώδες σωματίδιο όταν είναι ακίνητο έχει χρόνο ημισείας ζωής  $T$ . Όταν κινείται με ταχύτητα  $v$  έχει χρόνο ημισείας ζωής για ένα ακίνητο παρατηρητή  $T'$ . Για να βρούμε την σχέση που συνδέει το  $T$  και  $T'$  θεωρούμε την αναλλοίωτη ποσότητα

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad (2.6)$$

(Ο αναγνώστης θα μας επιτρέψει για λίγο ακόμα να μεταπηδάμε από το σύστημα μονάδων όπου  $c=1$  στο συνηθισμένο σύστημα μονάδων). Όταν το σωματίδιο είναι ακίνητο  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$  και συνεπώς

$$\Delta s^2 = c^2 T^2 \quad (2.7)$$