

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

1.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό πραγματοποιείται μια γενική ηλεκτρομαγνητική εισαγωγή, χρήσιμη στα προβλήματα κυματοδήγησης. Τα προβλήματα κυματοδήγησης περιλαμβάνουν κατά ένα μεγάλο μέρος αυτά που έχουν σχέση με τα μικροκύματα. Έτσι είναι φυσικό στο εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο ν' αναφερθούν και οι προσεγγιστικές ημιοπτικές θεωρίες της διάδοσης.

Τα μικροκύματα σήμερα παρουσιάζουν τεράστιο ενδιαφέρον σε μια ποικιλία εφαρμογών. Οι Τηλεπικοινωνίες, η Βιομηχανία, τα Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου και η Ιατρική είναι μερικές απ' αυτές τις περιοχές. Παρόλο το μεγάλο πρακτικό ενδιαφέρον, τα Μικροκύματα απαιτούν υψηλή θεωρητική γνώση του ηλεκτρομαγνητισμού, πράγμα απαραίτητο για την κατανόηση των φαινομένων που λαμβάνουν χώρα.

1.2. ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Στα προβλήματα κυματοδήγησης βασική μας μέριμνα είναι ο καθορισμός του ηλεκτρικού πεδίου E και του μαγνητικού πεδίου H , που προέρχονται από πηγές με πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου ρ_T και πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος J_T .

Στη γενική περίπτωση το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο μπορεί να βρεθεί με τη βοήθεια των σχέσεων που συνδέουν τις πεδιακές ποσότητες με τις πηγές. Οι σχέσεις αυτές δίνονται απ' τις ηλεκτρομαγνητικές εξισώσεις, που είναι οι ακόλουθες :

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{J}_T \quad (1-2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_T \quad (1-3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1-4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_T = - \frac{\partial \rho_T}{\partial t} \quad (1-5)$$

Οι τέσσερις πρώτες εξισώσεις είναι γνωστές σαν εξισώσεις του Maxwell, ενώ η πέμπτη σαν εξίσωση της συνέχειας. Είναι φανερό, απ' τις (1-1) - (1-5), ότι στις πεδιακές ποσότητες εκτός των \mathbf{E} και \mathbf{H} περιλαμβάνονται η ηλεκτρική μετατόπιση \mathbf{D} και η μαγνητική επαγωγή \mathbf{B} . Άρα τελικά το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο είναι ο χώρος ορισμού των διανυσμάτων \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{D} και \mathbf{B} .

Αν οι πηγές (αίτιο) ρ_T και \mathbf{J}_T μεταβάλλονται ημιτονικά με το χρόνο, με κυκλική συχνότητα ω , τότε θα πρέπει και τα πεδία (αποτέλεσμα) να μεταβάλλονται με τον ίδιο τρόπο. Μια τέτοια χρονική εξάρτηση μπορεί εύκολα να απλοποιήσει τις ηλεκτρομαγνητικές εξισώσεις με την εισαγωγή των ακόλουθων μιγαδικών ποσοτήτων :

$$\mathbf{E} = \text{Re} \left[\mathbf{E} e^{j\omega t} \right], \quad \mathbf{H} = \text{Re} \left[\mathbf{H} e^{j\omega t} \right] \quad \text{κ.λ.π.} \quad (1-6)$$

Αντικατάσταση της (1-6) στις (1-1) - (1-5) και απαλοιφή του όρου $e^{j\omega t}$ δίνει τις ακόλουθες απλοποιημένες εκφράσεις :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \quad (1-7)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J}_T \quad (1-8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_T \quad (1-9)$$

$$\nabla \cdot \mathbb{B} = 0 \quad (1-10)$$

$$\nabla \cdot \mathbb{J}_T = -j\omega\rho_T \quad (1-11)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι γνωστές σαν ηλεκτρομαγνητικές εξισώσεις για αρμονικά πεδία.

Η συνολική πυκνότητα ρεύματος \mathbb{J}_T περιλαμβάνει το ρεύμα διέγερσης \mathbb{J} και το ρεύμα αγωγιμότητας \mathbb{J}_c , το οποίο ρέει στους αγωγούς λόγω του πεδίου που παράγει το \mathbb{J} .

Ο χώρος στον οποίο βρίσκονται τα πεδία χαρακτηρίζεται στη γενική περίπτωση από τρεις τανυστές. Τον τανυστή αγωγιμότητας $[\sigma]$, το διηλεκτρικό τανυστή $[\epsilon]$ και τον τανυστή μαγνητικής επιδεκτικότητας $[\mu]$. Οι τρεις τανυστές συνδέουν τις ηλεκτρομαγνητικές ποσότητες με τον ακόλουθο τρόπο :

$$\mathbb{D} = [\epsilon]\mathbb{E} \quad (1-12)$$

$$\mathbb{B} = [\mu]\mathbb{H} \quad (1-13)$$

$$\mathbb{J}_c = [\sigma]\mathbb{E} \quad (1-14)$$

Επειδή οι τανυστές είναι τρίτης τάξης, οι σχέσεις (1-12) - (1-14) ανάγονται σε εξισώσεις μητρώων της μορφής :

$$\begin{bmatrix} D_u \\ D_v \\ D_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{uu} & \epsilon_{uv} & \epsilon_{uw} \\ \epsilon_{vu} & \epsilon_{vv} & \epsilon_{vw} \\ \epsilon_{wu} & \epsilon_{wn} & \epsilon_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_u \\ E_v \\ E_w \end{bmatrix} \quad (1-15)$$

$$\begin{bmatrix} B_u \\ B_v \\ B_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{uu} & \mu_{uv} & \mu_{uw} \\ \mu_{vu} & \mu_{vv} & \mu_{vw} \\ \mu_{wu} & \mu_{wn} & \mu_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_u \\ H_v \\ H_w \end{bmatrix} \quad (1-17)$$

$$\begin{bmatrix} J_u \\ J_v \\ J_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{uu} & \sigma_{uv} & \sigma_{uw} \\ \sigma_{vu} & \sigma_{vv} & \sigma_{vw} \\ \sigma_{wu} & \sigma_{wn} & \sigma_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_u \\ E_v \\ E_w \end{bmatrix} \quad (1-17)$$

όπου u , v και w είναι οι συντεταγμένες του συστήματος στο οποίο

αναλύονται οι ηλεκτρομαγνητικές ποσότητες. Εκτός από ειδικές περιπτώσεις, όπως οι κρύσταλλοι, οι φερρίτες κ.λ.π., οι τανυστές $[\epsilon]$, $[\mu]$ και $[\sigma]$ ανάγονται σε απλούς μιγαδικούς αριθμούς. Αυτό συμβαίνει γιατί, συνήθως, τα μέσα που μας ενδιαφέρουν είναι ομοιογενή και ισότροπα. Στην περίπτωση αυτή οι εξισώσεις (1-12) - (1-14) είναι της μορφής :

$$\mathbb{D} = \epsilon \mathbb{E} \quad (1-18)$$

$$\mathbb{B} = \mu \mathbb{H} \quad (1-19)$$

$$\mathbb{J}_c = \sigma \mathbb{E} \quad (1-20)$$

Μια σύγκριση των σχέσεων (1-15) - (1-17) με τις (1-18) - (1-20) αντίστοιχα, δίνει το συμπέρασμα ότι η ύπαρξη μιας συνιστώσας ηλεκτρικού ή μαγνητικού πεδίου σε ομογενές και ισότροπο μέσο συνεπάγεται την ύπαρξη αντίστοιχης συνιστώσας ηλεκτρικής μετατόπισης, μαγνητικής επαγωγής ή πυκνότητας ρεύματος. Αυτό δεν συμβαίνει σε μη ομογενές και ανισότροπο μέσο. Σ' ένα τέτοιο μέσο, μια συνιστώσα ηλεκτρικού ή μαγνητικού πεδίου μπορεί να προκαλέσει την εμφάνιση όλων των συνιστωσών των άλλων πεδιακών μεγεθών. Ειδικά για ομογενή και ισότροπο χώρο, οι ηλεκτρομαγνητικές εξισώσεις παίρνουν την ακόλουθη μορφή :

$$\nabla \times \mathbb{E} = -j\omega \mu \mathbb{H} \quad (1-21)$$

$$\nabla \times \mathbb{H} = j\omega \epsilon' \mathbb{E} + \mathbb{J} \quad (1-22)$$

$$\nabla \cdot \mathbb{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (1-23)$$

$$\nabla \cdot \mathbb{H} = 0 \quad (1-24)$$

$$\nabla \cdot \mathbb{J} = -j\omega \rho \quad (1-25)$$

Η ποσότητα ϵ' είναι :

$$\epsilon' = \epsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \quad (1-26)$$

Οι παραπάνω εκφράσεις (1-21) - (1-25) χρησιμοποιούνται στις περισσότερες εφαρμογές που αναφέρονται σε αρμονικά πεδία προερχόμενα από πηγές (ρ , \mathbb{J}).

Μερικές φορές είναι χρήσιμο να εισάγουμε μια ιδεατή ποσότητα γνωστή σα μαγνητική πυκνότητα ρεύματος M . Με την ποσότητα αυτή αποκαθίσταται πλήρης αντιστοιχία στις εξισώσεις στροφής (1-21) και (1-22). Έχουμε δηλαδή αντί της (1-21) την ακόλουθη :

$$\nabla \times E = -j\omega \mu H - M \quad (1-27)$$

Βέβαια το ερώτημα, που πιθανόν να υπάρξει, είναι τι άλλο χρησιμεύει η M . Κάνοντας μια ανάλυση των ιδιοτήτων της ηλεκτρικής πυκνότητας ρεύματος J μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η μαγνητική πυκνότητα ρεύματος είναι μια πυκνότητα που προκαλεί το ίδιο αποτέλεσμα με κάποια πολύπλοκη ηλεκτρική. Με άλλα λόγια θα μπορούσε να πει κανείς ότι οι J και M είναι δυαδικές ποσότητες. Ακολουθώντας την αρχή της δυαδικότητας, μπορούμε να πούμε ότι :

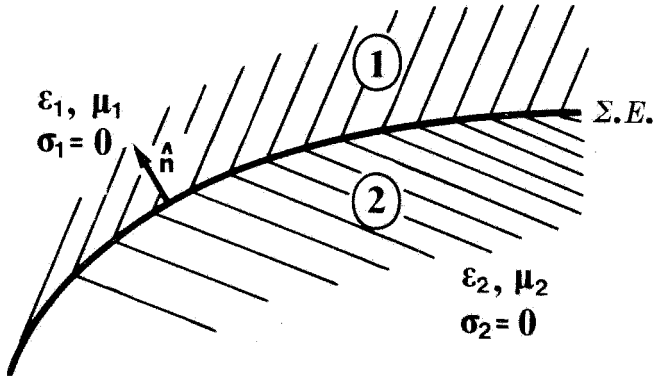
ΑΝ οι πηγές δύο συστημάτων #1 και #2 είναι δυαδικές και οι οριακές συνθήκες είναι δυαδικές, ΤΟΤΕ τα πεδία του καθενός συστήματος δίνονται απ' το άλλο με την ακόλουθη αντικατάσταση των ηλεκτρομαγνητικών ποσοτήτων :

#1	(=)	#2
J_1	(=)	M_2
μ_1	(=)	ϵ_2
ϵ_1	(=)	μ_2
$-H_1$	(=)	E_2
E_1	(=)	H_2

[Το σύμβολο (=) υποδηλώνει την αντιστοιχία]

1.3. ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Η λύση των ηλεκτρομαγνητικών εξισώσεων δεν είναι πλήρης αν δεν οριστούν οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες. Στο σχήμα (1.1) βλέπουμε την επιφάνεια διαχωρισμού δύο μη αγώγιμων μέσων, που χαρακτηρίζονται απ' τις παραμέτρους ϵ_1 , μ_1 και ϵ_2 , μ_2 .



Σχήμα 1.1. Συνοριακή επιφάνεια μεταξύ δύο μη αγώγιμων μέσων.

Στην επιφάνεια (Σ.Ε.) οι σχέσεις μεταξύ των πεδιακών μεγεθών απ' τη μια και την άλλη πλευρά δίνουν τις συνοριακές συνθήκες, [1] - [5]. Αυτές έχουν την ακόλουθη μορφή :

$$\hat{n} \cdot D_1 = \hat{n} \cdot D_2 \quad (1-28)$$

$$\hat{n} \cdot B_1 = \hat{n} \cdot B_2 \quad (1-29)$$

$$\hat{n} \times E_1 = \hat{n} \times E_2 \quad (1-30)$$

$$\hat{n} \times H_1 = \hat{n} \times H_2 \quad (1-31)$$

Οι εκφράσεις (1-28) και (1-29) δηλώνουν ότι οι κάθετες στη διαχωριστική επιφάνεια συνιστώσες της ηλεκτρικής μετατόπισης και της μαγνητικής επαγωγής είναι ίσες. Αντίστοιχα, οι (1-30) και (1-31) δηλώνουν την ισότητα των εφαπτομενικών συνιστωσών του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου απ' τις δύο πλευρές της επιφάνειας. Αν στη διαχωριστική επιφάνεια υπάρχει επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος J_s , τότε οι συνθήκες (1-28) και (1-31) μετασχηματίζονται στις :

$$\hat{n} \cdot (D_1 - D_2) = \rho_s \quad (1-32)$$

$$\hat{n} \times (H_1 - H_2) = J_s \quad (1-33)$$

όπου ρ_s είναι η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου, που συνδέεται με την J_s μέσω της εξίσωσης συνέχειας (1-25).

Παρόμοιες εκφράσεις μπορούμε να έχουμε για τις εφαπτομενικές συνιστώσες της μαγνητικής επαγωγής και του ηλεκτρικού πεδίου, εφόσον στην επιφάνεια διαχωρισμού υπάρχει μαγνητικό ρεύμα πυκνότητας M_s . Είναι :

$$\hat{n} \cdot (B_1 - B_2) = \rho_m \quad (1-34)$$

$$\hat{n} \times (E_1 - E_2) = M_s \quad (1-35)$$

όπου ρ_m είναι η ιδεατή μαγνητική πυκνότητα φορτίου συνδεδεμένη με την εξίσωση συνέχειας :

$$\nabla \cdot M_s = -j\omega\rho_m \quad (1-36)$$

Αν η περιοχή (2) είναι ένας ιδανικός αγωγός με άπειρη αγωγιμότητα, τα πεδία στην περιοχή αυτή μηδενίζονται και οι συνοριακές συνθήκες παίρνουν την ακόλουθη μορφή :

$$\hat{n} \times E_1 = 0 \quad (1-37)$$

$$\hat{n} \times H_1 = J_s \quad (1-38)$$

$$\hat{n} \cdot D_1 = \rho_s \quad (1-39)$$

$$\hat{n} \cdot B_1 = 0 \quad (1-40)$$

Οι παραπάνω εκφράσεις χρησιμοποιούνται με καλή ακρίβεια και για περιπτώσεις μη ιδανικών αγωγών. Αν θέλουμε να περιγράψουμε τις συνοριακές συνθήκες με μεγαλύτερη ακρίβεια, τότε θα πρέπει να σημειώσουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο σε μη ιδανικό αγωγό δεν μηδενίζεται εφαπτομενικά στην επιφάνειά του. Εκείνο που συμβαίνει είναι μια αποσβενυμένη διείσδυση του πεδίου μέσα στον αγωγό. Το βάθος στο οποίο το πεδίο μειώνεται κατά $1/e = 1/2.71828 \cong 0.368$ σε σχέση με την τιμή στην επιφάνεια είναι γνωστό σαν επιδερμικό βάθος και δίνεται από τη σχέση :

$$\delta = \sqrt{2/\omega\mu\sigma} \quad (1-41)$$

όπου ω είναι η κυκλική συχνότητα, μ η μαγνητική διαπερατότητα και σ η αγωγιμότητα του μέσου.

Οι συνοριακές συνθήκες για μη ιδανικό αγωγό δεν δίνονται απ' τις εξισώσεις (1-37) - (1-40) αλλά από άλλες γνωστές σαν συνοριακές συνθήκες επιφανειακής αντίστασης. Αν η επιφάνεια του αγωγού έχει σε

ένα σημείο της κύριες καμπυλότητες r_u και r_v , τότε, [6], τα πεδία στο σημείο αυτό σχετίζονται με τις ακόλουθες σχέσεις :

$$\hat{u} \cdot (\hat{n} \times E_1)(1+p) = Z_s \hat{v} \cdot (\hat{n} \times \hat{n} \times H_1) \quad (1-42)$$

$$\hat{v} \cdot (\hat{n} \times E_1)(1-p) = Z_s \hat{u} \cdot (\hat{n} \times \hat{n} \times H_1) \quad (1-43)$$

όπου \hat{u} και \hat{v} είναι οι κύριες διευθύνσεις εφαπτομενικά στην επιφάνεια.

Οι επιπλέον άγνωστες ποσότητες p και Z_s είναι :

$$p = \frac{1}{4} (1-j)\delta \left(\frac{1}{r_v} - \frac{1}{r_u} \right) \quad (1-44)$$

$$Z_s = \frac{1}{2} (1+j)\omega\mu_2\delta = \frac{1+j}{\sigma_2\delta} \quad (1-45)$$

Η Z_s χαρακτηρίζεται σαν η επιφανειακή αντίσταση του υλικού.

Οι συνοριακές συνθήκες (1-42) και (1-43) ισχύουν με καλή προσέγγιση και είναι γνωστές σαν συνοριακές συνθήκες εξαρτημένες απ' την καμπυλότητα. Για ακτίνες καμπυλότητας μεγαλύτερες από μερικά επιδερμικά βάθη ($\sim 10\delta$) μπορούμε ν' ανάγουμε τις (1-42) και (1-43) σε απλούστερη μορφή η οποία είναι :

$$\hat{n} \times E_1 = Z_s \hat{n} \times \hat{n} \times H_1 \quad (1-46)$$

Η έκφραση (1-46) είναι γνωστή και σαν συνοριακή συνθήκη του Leontovich [7].

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι όλες οι εκφράσεις που δίνονται αποτελούν μια προσέγγιση της πραγματικής κατάστασης και οποιαδήποτε απλοποίηση είναι εις βάρος της ακρίβειας. Επιπλέον αναφερόμαστε σε επιφάνειες που είναι ομαλές και δεν περιλαμβάνουν σημεία ανωμαλίας. Για σημεία ανωμαλίας, όπως τα σημεία μιας ακμής και οι κορυφές ενός σώματος, χρειάζεται ο καθορισμός της φύσης της συμπεριφοράς των πεδίων στη γειτονία τους. Γενικά μπορεί να βγάλει κανείς το συμπέρασμα, [8] - [10], ότι το πεδίο καθώς πλησιάζει σ' ένα σημείο ανωμαλίας θα πρέπει να παίρνει τιμές που δίνουν πεπερασμένη αποθηκευμένη ενέργεια σε μικρό χώρο γύρω του. Αυτό σημαίνει ότι οι εκφράσεις απειρισμού του πεδίου κοντά στην ακμή ή στην κορυφή θα

πρέπει να είναι της μορφής $r^{-\alpha}$, όπου r η απόσταση και $\alpha < 1$. Μ' αυτό τον τρόπο διατηρείται πεπερασμένη η αποθηκευμένη ενέργεια. Στη Βιβλιογραφία μπορεί κανείς να δει ενδιαφέρουσες περιπτώσεις μελέτης συνοριακών συνθηκών σε περιοχές ανωμαλίας. Αυτές βέβαια αναφέρονται σε σώματα όπως τα ημιεπίπεδα, οι σφήνες, οι ελλειπτικοί κώνοι και οι κυκλικοί κώνοι. Στη φύση τα σώματα δεν έχουν τέτοιου είδους απλές γεωμετρικές μορφές. Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε ότι κατά καλή προσέγγιση οι συνοριακές συνθήκες εξαρτώνται περισσότερο από μια μικρή περιοχή γύρω από το σημείο που ενδιαφέρει. Έτσι μια κορυφή ή μια ακμή ενός πολύπλοκου σώματος μπορεί να θεωρηθεί ότι παράγεται από ένα σύνολο απλούστερων γεωμετρικών μορφών.

1.4. ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΟΥ MAXWELL.

Οι εξισώσεις του Maxwell, όπως δίνονται στις σχέσεις (1-22), (1-23), (1-24) και (1-27), αποτελούν ένα σύστημα αλληλοεξαρτημένων διαφορικών εξισώσεων. Υπάρχουν πολλές μέθοδοι με τις οποίες μπορούμε να τις αποπλέξουμε και να πάρουμε διαφορικές εξισώσεις που η κάθε μια περιλαμβάνει ένα άγνωστο ηλεκτρομαγνητικό μέγεθος. Η επιλογή της μεθόδου εξαρτάται απ' την εφαρμογή. Για την περίπτωση των οδηγούμενων κυμάτων η πιο διαδεδομένη μέθοδος είναι αυτή που προκύπτει με τη χρήση των εξισώσεων στροφής (1-22) και (1-27) του Maxwell. Εφαρμόζουμε τη στροφή στα δύο μέλη των εξισώσεων αυτών και παίρνουμε :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = j\omega \epsilon' \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times \mathbf{J} \quad (1-47)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = j\omega \mu \nabla \times \mathbf{H} - \nabla \times \mathbf{M} \quad (1-48)$$

Αν συνδυάσουμε την έκφραση (1-47) με την (1-27) καθώς και την (1-48) με την (1-22) καταλήγουμε σε δύο διαφορικές εξισώσεις της ακόλουθης μορφής :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} - \omega^2 \mu \epsilon' \mathbf{H} = -j\omega \epsilon' \mathbf{M} + \nabla \times \mathbf{J} \quad (1-49)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - \omega^2 \mu \epsilon' \mathbf{E} = -j\omega \mu \mathbf{J} - \nabla \times \mathbf{M} \quad (1-50)$$

Αυτές είναι γνωστές σαν μη ομογενείς (έχουν το δεύτερο μέλος διάφορο

του μηδενός) διανυσματικές διαφορικές εξισώσεις κύματος. Η λύση τέτοιων εξισώσεων μπορεί να γίνει με πολλές μεθόδους, ανάλογα με τη φύση και τη γεωμετρία του προβλήματος. Στην περίπτωση μας θεωρούμε χώρους διάδοσης ελεύθερους φορτίων ($J=0$, $M=0$), οπότε οι (1-49) και (1-50) ανάγονται σε ομογενείς διανυσματικές διαφορικές εξισώσεις. Οι ομογενείς διανυσματικές διαφορικές εξισώσεις κύματος μπορούν να αναχθούν σε αριθμητικές με τη χρήση μιας συνιστώσας του κάθε πεδίου, σταθερής διεύθυνσης. Η συνιστώσα αυτή, όπως θα δούμε, με τη χρήση των εξισώσεων στροφής του Maxwell μπορεί να μας δώσει τις υπόλοιπες συνιστώσες των πεδίων.

Θα πρέπει να τονιστεί ότι τα προβλήματα κυματοδότησης αποτελούν μια ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα εφαρμογή επίλυσης των εξισώσεων του Maxwell. Στην τελική έκφραση του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου θα ληφθούν υπόψη οι συνοριακές συνθήκες της προηγούμενης παραγράφου. Αυτές οι συνθήκες είναι εκείνες που δίνουν διαφορετική λύση για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο, παρόλο που η ομογενής εξίσωση που υπακούει το κάθε πεδίο είναι ακριβώς της ίδιας μορφής.

1.5. ΜΕΘΟΔΟΣ ΧΩΡΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι η εύρεση των εντάσεων του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου ανάγεται στη λύση της ομογενούς αριθμητικής εξίσωσης του κύματος. Θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας ότι λόγω της απουσίας φορτίων οι εκφράσεις :

$$\nabla \times \nabla \times (\mathbf{E}) \equiv (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \quad (1-51)$$

$$\nabla \times \nabla \times (\mathbf{H}) \equiv (\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} \quad (1-52)$$

έχουν τις αποκλίσεις :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1-53)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (1-54)$$

οπότε τελικά οι ομογενείς εξισώσεις γίνονται :

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \kappa^2 \mathbf{E} = 0 \quad (1-55)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + \kappa^2 \mathbf{H} = 0 \quad (1-56)$$

$$(\kappa^2 = \omega^2 \mu \epsilon)$$

Η επίλυση των (1-55) και (1-56) ως προς μία συνιστώσα ανάγεται στη λύση της γενικής εξίσωσης :

$$\nabla^2 \Psi + \kappa^2 \Psi = 0 \quad (1-57)$$

Η συνάρτηση Ψ μπορεί να εκφραστεί σ' ένα απ' τα ορθογώνια συστήματα συντεταγμένων. Αν x_1, x_2 και x_3 είναι οι τρεις συντεταγμένες του συστήματος, τότε για ένα περιορισμένο αριθμό συστημάτων μπορεί να βρεθεί μια μερική λύση της (1-57), η οποία να είναι το γινόμενο τριών ανεξάρτητων συναρτήσεων. Δηλαδή :

$$\Psi(x_1, x_2, x_3) = \Psi^{(1)}(x_1) \Psi^{(2)}(x_2) \Psi^{(3)}(x_3) \quad (1-58)$$

Η κάθε συνάρτηση $\Psi^{(i)}(x_i)$ ($i=1,2,3$) είναι λύση μιας διαφορικής εξίσωσης με ολικές παραγώγους. Η διαφορική εξίσωση αυτή προκύπτει με την αντικατάσταση της έκφρασης (1-58) στην (1-57). Κατά τη διαδικασία εισάγονται δύο ποσότητες χωρισμού της εξίσωσης (1-57) σε τρεις εξισώσεις μιας μεταβλητής γνωστές σαν ιδιοτιμές του προβλήματος. Αυτές μπορούν να έχουν φάσμα διάκριτο ή συνεχές. Γενική λύση της (1-57) θα είναι ο γραμμικός συνδυασμός των λύσεων (1-58), που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές του προβλήματος. Για διακεκριμένες ιδιοτιμές η λύση θα δίνεται υπό μορφή διπλού άθροισματος. Αν μια ιδιοτιμή είναι συνεχής, τότε το ένα άθροισμα αντικαθίσταται με ολοκλήρωμα. Αν και οι δύο ιδιοτιμές είναι συνεχείς, τότε το διπλό άθροισμα γίνεται διπλό ολοκλήρωμα. Υπάρχουν βέβαια και περιπτώσεις όπου μια απ' τις ιδιοτιμές έχει μόνο μια τιμή. Είναι προφανές ότι τότε η λύση ανάγεται σε άθροισμα ή απλό ολοκλήρωμα. Θα πρέπει να τονίσουμε ότι η επιλογή του συστήματος συντεταγμένων εξαρτάται συνήθως απ' τη μορφή των συνοριακών επιφανειών.

Σ' ένα ορθογωνικό σύστημα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων (x_1, x_2, x_3) με μετρικούς συντελεστές h_1, h_2, h_3 , [11], θα πρέπει οι συνοριακές επιφάνειες να είναι της μορφής $x_i = c_i$ ($i=1,2,3$), όπου c_i είναι μια σταθερά. Ο βασικός κανόνας που ισχύει είναι ότι : η αριθμητική εξίσωση κύματος είναι διαχωρίσιμη στο παραπάνω σύστημα εφόσον ένας απ' τους μετρικούς συντελεστές είναι ίσος με τη μονάδα, ενώ ο λόγος

των δύο άλλων είναι ανεξάρτητος της συντεταγμένης που αντιστοιχεί στο μοναδιαίο μετρικό συντελεστή. Απ'τα έντεκα (11) ορθογώνια συστήματα συντεταγμένων μόνο τα έξι (6) έχουν την παραπάνω ιδιότητα. Αυτά είναι : το καρτεσιανό, το κυλινδρικό (κυκλικό, ελλειπτικό και παραβολικό), το σφαιρικό και το κωνικό σύστημα συντεταγμένων, [14]. Έτσι είναι σαφές ότι η μέθοδος χωρισμού μεταβλητών μπορεί να εφαρμοστεί σε χώρους με επίπεδες, κυλινδρικές (κυκλικές, ελλειπτικές και παραβολικές), σφαιρικές και κωνικές συνοριακές επιφάνειες.

1.6. ΑΚΤΙΝΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΔΙΑΔΟΣΗΣ

Μερικές φορές η περιγραφή του τρόπου διάδοσης απλοποιείται με τη θεώρηση των ακτίνων διάδοσης. Οι ακτίνες διάδοσης, γνωστές απ'τη γεωμετρική οπτική, μπορούν να εφαρμοστούν όταν ο κυματάριθμος $k_0=2\pi/\lambda$ τείνει στο άπειρο. Στην περίπτωση αυτή, οι ακτίνες προκύπτουν απ'τις εξισώσεις του Maxwell με κατάλληλη προσέγγιση. Υπάρχουν δύο κλασσικές αναλύσεις, μία των Sommerfeld-Runge και μία των Luneberg-Kline, οι οποίες εξηγούν τον τρόπο αναγωγής των εξισώσεων Maxwell. Εδώ θα δοθεί η ανάλυση των Sommerfeld-Runge η οποία παρουσιάζει μεγαλύτερη απλότητα, [14]-[15].

Θεωρούμε τις εξισώσεις στροφής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στο χώρο :

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}_1 &= -j\omega\mu\mathbf{H}_1 \\ \nabla \times \mathbf{H}_1 &= j\omega\epsilon\mathbf{E}_1 \end{aligned} \right\} \quad (1-59)$$

Περιγράφουμε τα πεδία \mathbf{E}_1 και \mathbf{H}_1 με τις ακόλουθες εκφράσεις :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \mathbf{E}(x, y, z)e^{-jk_0\Phi(x, y, z)} \\ \mathbf{H}_1 &= \mathbf{H}(x, y, z)e^{-jk_0\Phi(x, y, z)} \end{aligned} \right\} \quad (1-60)$$

Η συνάρτηση $\Phi(x, y, z)$ παριστάνει τη φάση των πεδίων.

Αντικαθιστούμε τις σχέσεις (1-60) στις εξισώσεις (1-59) και λύνουμε ως προς \mathbf{E} . Θα είναι :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & -\frac{\epsilon_0}{\epsilon} \left[(\mathbf{E} \cdot \nabla \Phi) \nabla \Phi - |\nabla \Phi|^2 \mathbf{E} \right] + \frac{\epsilon_0}{j\epsilon k_0} \left[\nabla \Phi \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) \right] + \\ & + \frac{\epsilon_0}{\epsilon k_0^2} \left[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) \right] \end{aligned} \quad (1-61)$$

Στο όριο των πολύ ψηλών συχνοτήτων θα είναι :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{k_0} & \rightarrow 0 \\ \frac{1}{k_0^2} & \rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-62)$$

οπότε η (1-61) παίρνει τη μορφή :

$$\mathbf{E} + \frac{\epsilon_0}{\epsilon} (\mathbf{E} \cdot \nabla \Phi) \nabla \Phi - \frac{\epsilon_0}{\epsilon} |\nabla \Phi|^2 \mathbf{E} = 0 \quad (1-63)$$

Για να αληθεύει η εξίσωση (1-63) θα πρέπει :

$$\left. \begin{aligned} |\nabla \Phi|^2 & = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = n^2 \\ \mathbf{E} \cdot \nabla \Phi & = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-64)$$

(ο n είναι γνωστός σα δείκτης διάθλασης του μέσου).

Για ισότροπο μέσο ο δείκτης διάθλασης n είναι ανεξάρτητος της διεύθυνσης, οπότε :

$$|\nabla \Phi| = \frac{d\Phi}{ds} = n \quad (1-65)$$

και η φάση μετά από ολοκλήρωση είναι :

$$\Phi = \Phi_0 + ns \quad (1-66)$$

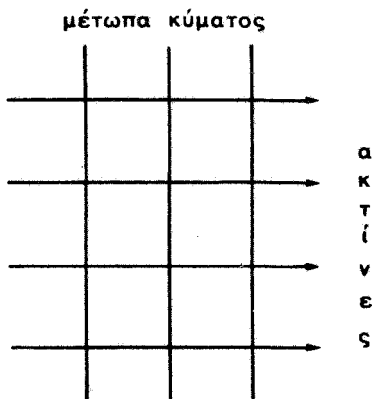
Οι εξισώσεις (1-64) και (1-66) δείχνουν ότι σ' ένα ομογενές μέσο το πεδίο εφάπτεται στο μέτωπο κύματος, το δε μέτωπο μεταβάλλεται γραμμικά ανάλογα με την απόσταση. Αυτό σημαίνει ότι η ενέργεια μεταφέρεται κατά μήκος ευθειών, κάθετων στο μέτωπο, γνωστών σαν οπτικών ακτίνων. Στη γεωμετρική οπτική πρέπει να ξέρουμε ή τη μορφή του μετώπου, γνωστή και σαν εικόνα του συστήματος, ή τις οπτικές ακτίνες. Για ένα επίπεδο κύμα η επιφάνεια των εικόνων είναι επίπεδα

κάθετα (σχήμα 1.2). Για μια σφαιρική πηγή οι εικόνες είναι σφαιρικές επιφάνειες με κέντρο την πηγή (σχήμα 1.3). Με εντελώς αντίστοιχο τρόπο μπορούμε να δείξουμε παρόμοιες ιδιότητες για το μαγνητικό πεδίο. Δηλαδή :

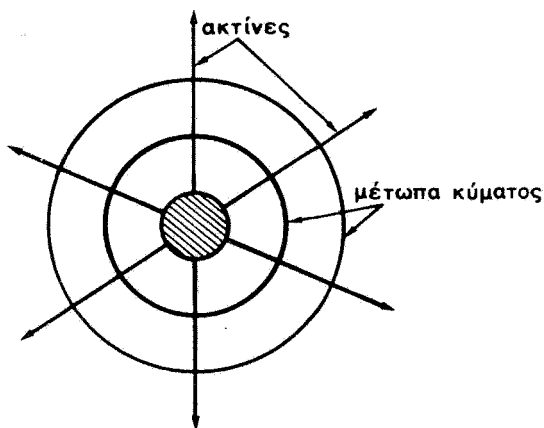
$$\mathbf{H} \cdot \nabla \Phi = 0 \quad (1-67)$$

Οι εκφράσεις (1-64) και (1-67) καθορίζουν όλα τα δεδομένα διάδοσης.

Η μελέτη των οπτικών ακτίνων συμπληρώνεται με τον προσδιορισμό του πεδίου συναρτήσεως της ακτίνας διάδοσης. Στην περίπτωση μας ενδιαφερόμαστε για επίπεδα κύματα, όπου το πεδίο παραμένει σταθερό.



Σχήμα 1.2. Μορφή επιπέδου κύματος.



Σχήμα 1.3. Μορφή σφαιρικού κύματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1-1. Να εξηγηθεί ποιά απ' τις εκφράσεις

$$E_z = E_0 e^{-jkx}$$

$$E_z = E_0 e^{-jky}$$

$$E_z = E_0 e^{-jkz}$$

παριστάνει ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

1-2. Ηλεκτρικό πεδίο έχει την ακόλουθη μορφή :

$$E = (\hat{x} - j\hat{y})E_0 e^{-jkz}$$

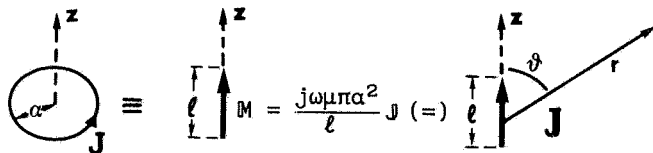
Να δοθεί το μαγνητικό πεδίο.

1-3. Μεταλλικός κύλινδρος κυκλικής διατομής έχει αγωγιμότητα $\sigma = 5.8 \times 10^6 \text{ mho/m}$. Να δειχθεί η διαφορά % της συνοριακής συνθήκης Leontovich με' τις συνοριακές συνθήκες τις εξαρτημένες από την καμπυλότητα. Δίνεται η συχνότητα $f = 10 \text{ GHz}$ και η ακτίνα του κυλίνδρου συναρτήσει του επιδερμικού βάρους δ :

$$r = i \cdot \delta \quad (i = 1, 2, 3, \dots, 256)$$

1.4. Να αποδειχτεί η σχέση (1-67) για το όριο των υψηλών συχνοτήτων.

1.5. Ένας μικρός βρόχος ρεύματος και ένα μικρό δίπολο είναι δυαδικά συστήματα.



Αν το πεδίο του διπόλου είναι

$$E_\theta = \frac{J \cdot \hat{z} \cdot \ell}{4\pi r} e^{-jkr} \sin\theta, \quad H_\phi = \frac{J \cdot \hat{z} \cdot \ell}{4\pi r} jk e^{-jkr} \sin\theta$$

να δοθεί το πεδίο του βρόχου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Stratton, J.A. : "Electromagnetic Theory", chap. I, McGraw-Hill Book Company, New York, 1941.
2. Jordan, E.C. : "Electromagnetic Waves and Radiating Systems", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1950.
3. Ramo, S., J.R. Whinnery and T. Van Duzer : "Fields and Waves in Communication Electronics", John Wiley & Sons, Inc., New York, 1961.
4. King, R.W.P. : "Fundamental Electromagnetic Theory", Dover Publications, Inc., New York, 1969.
5. Collin R.E., and F.J. Zucker : "Antenna Theory" Part 1, McGraw-Hill Book Company, New York, 1969.
6. Mitzner, K.M. : "An integral equation approach to scattering from a body of finite conductivity", Radio Science, 2 (New Series), pp.1459-1470, 1967.
7. Leontovich, M.A. : "Approximate boundary conditions for the electromagnetic field on the surface of a good conductor", Investigations on Radio wave Propagation, Pt. II, pp.5-12, (Printing House of the Academy of Sciences, Moscow), 1948, Transl., V.A. Fock, Diffraction, refraction and reflection of radio waves, Appendix, Air Force Cambridge Res. Center TN-S7-102, 1957.
8. Meixner, J. : "The edge conditions in the theory of electromagnetic waves at perfectly conducting Plane Screens", Ann. Physik, Vol.6, pp.2-9, Sept. 1949.
9. Sahalos, J., and G.A. Thiele : "On the eigenfunction solution for scattered fields and surface currents of a vertex", IEEE Trans. on Antennas and Propagation, Vol. AP-31, pp.206-211, Jan. 1983.

10. Vafiadis, E., and J.N. Sahalos : "Analysis of Semi-infinite elliptic conical scatterer", J. Physics D. (Applied Physics) pp.1475-1493, 1983
11. Morse, P., and H. Feshbach : "Methods of theoretical Physics", Part 2, McGraw-Hill Book company, New York, 1953.
12. Tai, C.T. : "Dyadic Green's functions in electromagnetic theory" Intext Educational Publishers, Scranton, 1974.
13. Van Bladel, J. : "Electromagnetic Fields", McGraw-Hill Book Company, New York, 1964.
14. Bowman, J. J., T. B. A. Senior, and P. L. E. Uslenghi : "Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes", North-Holland Publishing Company - Amsterdam, 1969.
15. Born, M., and E. Wolf : "Principles of Optics", Pergamon Press, Oxford, 1964.

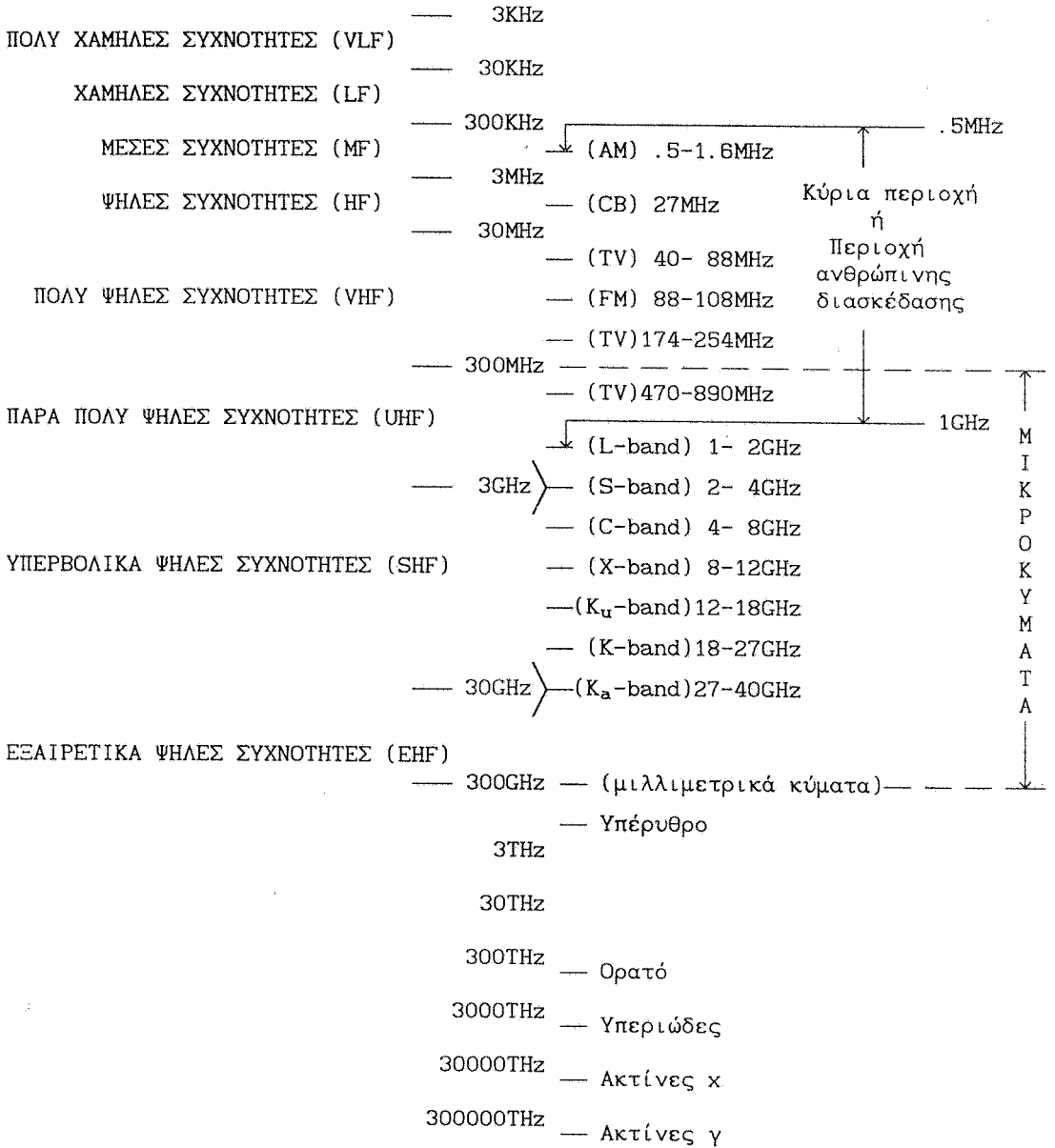
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΟΔΗΓΟΥΜΕΝΑ ΚΥΜΑΤΑ

2.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μια απ' τις βασικές επιδιώξεις των τεχνικών, που ασχολούνται με προβλήματα διάδοσης, είναι η σχεδίαση των κατάλληλων διατάξεων και μέσων με τα οποία υπάρχει η δυνατότητα μεταφοράς υψίσυχνης ενέργειας από ένα σημείο σε άλλο. Συνηθισμένα μέσα διάδοσης είναι οι γραμμές μεταφοράς, οι μεταλλικοί κυματοητογοί, οι οπτικές ίνες και οι μικροταινίες (microstrips).

Ξεκινώντας απ' τις εξισώσεις του Maxwell μπορούμε να βρούμε ότι κάθε ηλεκτρικό κύκλωμα, ακόμα και το στοιχειοδέστερο, μεταφέρει την ενέργεια με ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που περιβάλλει τους αγωγούς του. Σ' όλα λοιπόν τα παραπάνω μέσα διάδοσης θα πρέπει να υπάρχει ένας ηλεκτρομαγνητικός μηχανισμός κυματοδήγησης. Το πεδίο με μορφή ενός "οδηγούμενου κύματος" πηγαίνει απ' το ένα σημείο στο άλλο. Ένα σύστημα κυματοδήγησης διαφέρει απ' το κλασσικό ενεργειακό δίκτυο των 50Hz. Το δίκτυο συνδέεται με κοινά καλώδια και το φορτίο εξόδου λειτουργεί ανάλογα με την κατανάλωση ρεύματος. Ένα υψίσυχο σύστημα VHF ή UHF ή μικροκυμάτων με το ίδιο μήκος προς το προηγούμενο δίκτυο χρειάζεται μια ειδική σχεδίαση. Μάλιστα ανάλογα με τη συχνότητα έχουμε άλλους τρόπους σχεδίασης. Στο σχήμα (2.1) δίνουμε το φάσμα συχνοτήτων με την ονοματολογία των περιοχών για καλλίτερη εποπτεία.



Σχήμα 2.1. Το φάσμα συχνοτήτων.

Τα μέσα που χρησιμοποιούνται για να οδηγήσουν κύματα ονομάζονται κυματοδηγοί. Αυτοί χαρακτηρίζονται απ' το σχήμα της διατομής τους και τα ηλεκτρικά χαρακτηριστικά τους κατά τη διεύθυνση διάδοσης. Υποτίθεται ότι ο κυματοδηγός κατά τη μελέτη του είναι απείρου μήκους ή συνδέεται με κατάλληλα φορτία ώστε να συμπεριφέρεται σαν απείρου μήκους.

Ένα ερώτημα που πολλές φορές ανακύπτει είναι αν μια κεραία μπορεί να χαρακτηριστεί σαν κυματοδηγός. Βέβαια η κεραία είναι μια διάταξη με την οποία οδηγούμε ηλεκτρομαγνητικά κύματα, αυτό όμως δεν σημαίνει ότι είναι κυματοδηγός. Η κεραία με οποιαδήποτε απολαβή ισχύος δεν μπορεί να μεταφέρει την ακτινοβολία κατά μήκος μιας μόνο διεύθυνσης. Αυτό την ξεχωρίζει απ' τους κυματοδηγούς οι οποίοι έχουν αυτή τη βασική ιδιότητα. Έτσι ναι μεν η κεραία "οδηγεί" τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, δεν είναι όμως κυματοδηγός.

2.2. ΡΥΘΜΟΙ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΗΣΗΣ

Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο στην περιοχή κυματοδήγησης μπορεί να βρεθεί με μεθόδους που αναφέρονται στο πρώτο κεφάλαιο. Αρχίζουμε επιλέγοντας ένα κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων (x_1, x_2, x_3) , όπου οι επιφάνειες του κυματοδηγού μπορούν να εκφραστούν με τη μορφή :

$$\begin{aligned}x_i &= \text{σταθερό} & (2-1) \\(i &= 1, 2)\end{aligned}$$

(το x_3 είναι η διεύθυνση διάδοσης)

Ο κυματοδηγός χωρίζεται σε δύο περιοχές, την περιοχή των πηγών και την περιοχή της καθαρής κυματοδήγησης. Στη δεύτερη αυτή περιοχή υποτίθεται ότι δεν υπάρχουν ρευματικές πυκνότητες. Ενδιαφερόμαστε ειδικά γι' αυτή την περιοχή γιατί είναι η βάση όλων των κυκλωμάτων κυματοδήγησης. Γενικά ένας κυματοδηγός μπορεί να επιτρέπει τη δίοδο ορισμένων "μορφών" ηλεκτρομαγνητικών πεδίων γνωστών σα "ρυθμών". Ένας ρυθμός εξαρτάται απ' τη συχνότητα, τη θέση και το είδος της πηγής διέγερσης. Για μια συγκεκριμένη συχνότητα μόνο ορισμένα είδη ρυθμών είναι δυνατά. Αν η διάδοση γίνεται στη διεύθυνση του άξονα

z , τότε το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο μεταβάλλεται κατά τη διεύθυνση z εκθετικά με τη μορφή :

$$e^{-\gamma_m z}$$

Ο γ_m ονομάζεται σταθερή διάδοσης για το ρυθμό m . Είναι ένας μιγαδικός αριθμός ($\gamma_m = \alpha_m + j\beta_m$) και εξαρτάται απ' τη διατομή, τη συχνότητα και το υλικό κατασκευής του κυματοδηγού. Οι τιμές του γ_m είναι γνωστές και σαν χαρακτηριστικές τιμές ή ιδιοτιμές που αντιστοιχούν στο ρυθμό m . Συνήθως, για μέσα διάδοσης χωρίς απώλειες, οι ιδιοτιμές γ_m είναι καθαροί φανταστικοί ή καθαροί μιγαδικοί αριθμοί. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε $\gamma_m = j\beta_m$ και αναφερόμαστε σε ρυθμό διάδοσης. Αντίθετα στη δεύτερη περίπτωση έχουμε $\gamma_m = \alpha_m$ και αναφερόμαστε σε αποσβεννύμενο ρυθμό.

Κωδικοποίηση των ρυθμών μπορεί να γίνει μόνο για ειδικές απλές γεωμετρίες των κυματοδηγών. Αυτή βασίζεται στην εξέταση των συνιστωσών E_z και H_z του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου κατά τη διεύθυνση διάδοσης, [1]. Αναλυτικά έχουμε τους ακόλουθους ρυθμούς :

TEM (Transverse ElectroMagnetic)	όπου $E_z=0$ και $H_z=0$
TE (Transverse Electric)	όπου $E_z=0$ και $H_z \neq 0$
TM (Transverse Magnetic)	όπου $E_z \neq 0$ και $H_z=0$
HE και EH (Υβριδικοί ρυθμοί)	όπου $E_z \neq 0$ και $H_z \neq 0$

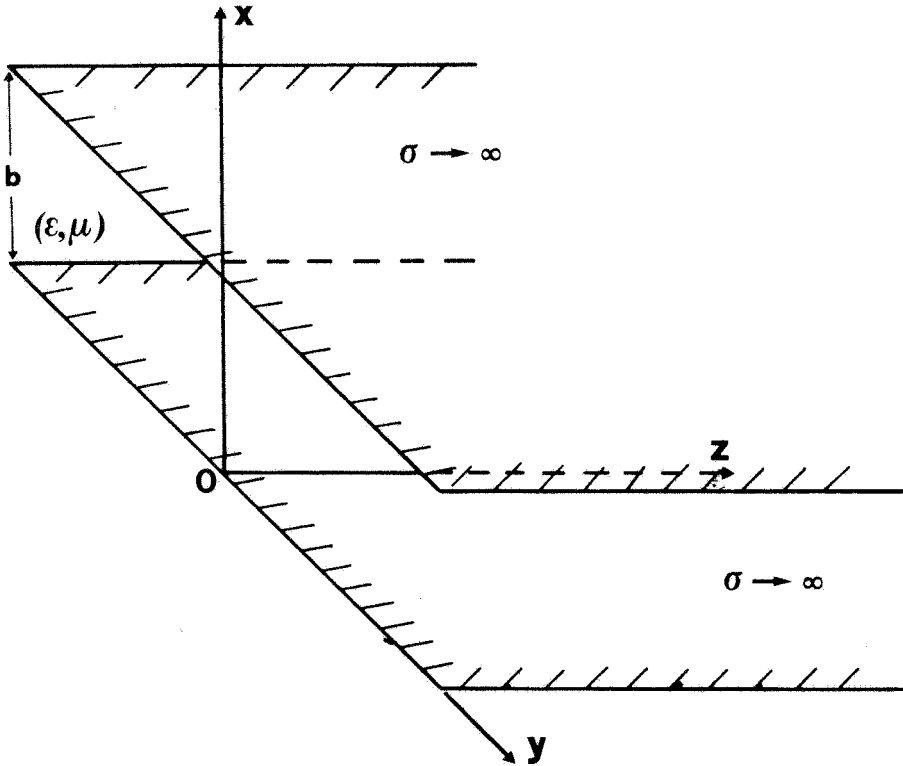
Συνήθως ένας κυματοδηγός μπορεί να έχει μόνο ορισμένα είδη ρυθμών κάτω από ορισμένες συνθήκες. Στην επόμενη παράγραφο θα αναλύσουμε την κυματοδηγήση σε κυματοδηγό παράλληλων επιπέδων και θα δώσουμε την αναγκαία ονοματολογία.

2.3. ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΔΥΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΑΓΩΓΙΜΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

2.3.1. Κυματική περιγραφή

Στο σχήμα 2.2 φαίνεται κυματοδηγός δύο παράλληλων αγωγίμων επιπέδων. Υποτίθεται ότι τα επίπεδα είναι ιδανικοί αγωγοί και ο

ενδιάμεσος χώρος δεν έχει διηλεκτρικές ή άλλες απώλειες. Ο κυματοδηγός έχει την απλούστερη δυνατή γεωμετρία και πρακτικά βοηθάει στο ν'αντιληφθούμε τον τρόπο με τον οποίο γενικά πραγματοποιείται η κυματοδότηση [1-3].



Σχήμα 2.2. Κυματοδηγός δύο παράλληλων αγωγίμων επιπέδων.

Επιλέγουμε το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$, όπου οι επιφάνειες του κυματοδηγού δίνονται απ' τις εκφράσεις :

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x = b \end{array} \right\} \quad (2-2)$$

Θεωρούμε ότι η διάδοση γίνεται κατά τη διεύθυνση του άξονα z . Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, το πεδίο να εξαρτάται απ' τα z και x και να

είναι ανεξάρτητο του y . Η εξάρτηση απ' το z είναι της μορφής $e^{-\gamma z}$ ενώ η εξάρτηση απ' το x μπορεί να βρεθεί με τη χρήση της εξίσωσης κύματος (1-57). Η συνάρτηση $\Psi = \Psi(x, z)$ μπορεί να εκφραστεί σαν :

$$\Psi = \Psi(x)e^{-\gamma z} \quad (2-3)$$

Αντικατάσταση της (2-3) στην (1-57) και απαλοιφή της ποσότητας $e^{-\gamma z}$ δίνει την ακόλουθη διαφορική εξίσωση ως προς $\Psi(x)$:

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + (k^2 + \gamma^2)\Psi(x) = 0 \quad (2-4)$$

Η (2-4) έχει λύση της μορφής :

$$\Psi(x) = Ae^{-jhx} + Be^{jhx} \quad (2-5)$$

όπου A, B αυθαίρετες σταθερές και

$$h = \sqrt{k^2 + \gamma^2} \quad (2-6)$$

Χρησιμοποιούμε την κωδικοποίηση των προηγούμενων παραγράφων και υποθέτουμε ότι η $\Psi(x)e^{-\gamma z}$ παριστάνει τη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου E_z . Στην περίπτωση αυτή οι συνοριακές συνθήκες, γνωστές και σα συνθήκες Dirichlet, περιγράφονται απ' την :

$$\Psi(x) \Big|_{\substack{x=0 \\ \& x=b}} = 0 \quad (2-7)$$

Εφαρμόζοντας τη (2-7) στη (2-5) παίρνουμε :

$$\left. \begin{aligned} A + B &= 0 \\ Ae^{-jhb} + Be^{jhb} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

Για να έχει λύση το σύστημα (2-8) θα πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών του να είναι ίση με το μηδέν. Δηλαδή :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-jhb} & e^{jhb} \end{vmatrix} = 0 \quad (2-9)$$

Η (2-9) είναι της μορφής :

$$e^{jhb} - e^{-jhb} = 0 \quad (2-10)$$

ή $2j\sinh b = 0 \quad (2-11)$

Ο μηδενισμός του ημιτόνου γίνεται όταν :

$$hb = m\pi \quad (2-12)$$

οπότε :

$$h = h_m = \frac{m\pi}{b} \quad (m=1,2,\dots) \quad (2-13)$$

Αντικαθιστούμε την τιμή του h στην έκφραση (2-5), λαμβάνοντας υπόψη απ' τη (2-8) ότι $A = -B$. Έχουμε :

$$\Psi(x) = -Be^{-j\frac{m\pi x}{b}} + Be^{j\frac{m\pi x}{b}} \quad (2-14)$$

ή $\Psi(x) = 2jB\sin\left(\frac{m\pi}{b}x\right) \quad (2-15)$

θέτουμε τη σταθερή $2jB$ σαν E_0 και χρησιμοποιώντας τη (2-3) παίρνουμε :

$$E_z(x,z) = E_0\sin\left(\frac{m\pi}{b}x\right)e^{-\gamma_m z} \quad (2-16)$$

όπου : $\gamma_m = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 - k^2} \quad (2-17)$

Αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση Ψ παριστάνει τη συνιστώσα H_z του μαγνητικού πεδίου, τότε οι οριακές συνθήκες, γνωστές και σαν οριακές συνθήκες Neumann, είναι της μορφής :

$$\left. \frac{d\Psi(x)}{dx} \right|_{\substack{x=0 \\ \& x=b}} = 0 \quad (2-18)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, όπως προηγουμένως, μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε ότι :

$$H_z(x,z) = H_0\cos\left(\frac{m\pi}{b}x\right)e^{-\gamma_m z} \quad (2-19)$$

Χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις στροφής του Maxwell, λαμβάνοντας υπόψη ότι η εξάρτηση ως προς z όλων των συνιστωσών του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου είναι της μορφής $e^{-\gamma_m z}$. Θα είναι :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma_m H_y &= j\omega \epsilon E_x \\ -\gamma_m H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= j\omega \epsilon E_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= j\omega \epsilon E_z \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma_m E_y &= -j\omega \mu H_x \\ -\gamma_m E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -j\omega \mu H_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -j\omega \mu H_z \end{aligned} \right\} \quad (2-20)$$

Λύνουμε τις εξισώσεις ανά δύο όπως δείχνουν τα βέλη και παίρνουμε τις (E_x, H_y) και (E_y, H_x) συνιστώσες συναρτήσεως των H_z και E_z .

$$\left. \begin{aligned} E_x &= -\frac{\gamma_m}{h_m^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} - j \frac{\omega \mu}{h_m^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ H_y &= -\frac{\gamma_m}{h_m^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} - j \frac{\omega \epsilon}{h_m^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (2-21)$$

$$\left. \begin{aligned} E_y &= -\frac{\gamma_m}{h_m^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} + j \frac{\omega \mu}{h_m^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ H_x &= -\frac{\gamma_m}{h_m^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} + j \frac{\omega \epsilon}{h_m^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (2-22)$$

$$\left[h_m^2 = k^2 + \gamma_m^2 = \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]$$

Επειδή οι συνιστώσες του πεδίου είναι ανεξάρτητες του y , όλες οι $\frac{\partial}{\partial y}$ είναι μηδέν με αποτέλεσμα οι εκφράσεις (2-21) και (2-22) να παίρνουν τη μορφή :

$$\left. \begin{aligned} E_x &= -\frac{\gamma_m}{h_m^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ H_y &= -j \frac{\omega \epsilon}{h_m^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (2-23)$$

$$\left. \begin{aligned} E_y &= j \frac{\omega \mu}{h_m^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ H_x &= -\frac{\gamma_m}{h_m^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (2-24)$$

Όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς, για να υπάρχει ηλεκτρομαγνητικό πεδίο θα πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον μία απ' τις συνιστώσες E_z ή H_z . Στην περίπτωση που $E_z=0$ ο τρόπος διάδοσης είναι TE, ενώ στην περίπτωση που $H_z=0$ ο τρόπος διάδοσης είναι TM. Στην περίπτωση που $E_z \neq 0$ και $H_z \neq 0$ δεν έχουμε έναν καινούργιο τρόπο διάδοσης, αλλά έχουμε το άθροισμα των δύο ανεξάρτητων TE και TM. Άρα δεν μπορούμε να μιλάμε για ξεχωριστή περίπτωση διάδοσης.

2.3.2. Πεδία και χαρακτηριστικά των ρυθμών TE και TM.

Με τη χρήση των εκφράσεων (2-16), (2-23) και (2-19), (2-24) μπορούμε να βρούμε τις μορφές των συνιστωσών του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου για τους διάφορους ρυθμούς. Στο ρυθμό TM έχουμε :

$$\left. \begin{aligned} E_z &= E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{b} x\right) e^{-\gamma_m z} \\ E_x &= -E_0 \left[\gamma_m / \left(\frac{m\pi}{b}\right) \right] \cos\left(\frac{m\pi}{b} x\right) e^{-\gamma_m z} \\ H_y &= -E_0 \left[j\omega\epsilon / \left(\frac{m\pi}{b}\right) \right] \cos\left(\frac{m\pi}{b} x\right) e^{-\gamma_m z} \end{aligned} \right\} \quad (2-25)$$

Επειδή στον παραπάνω ρυθμό η μορφή των πεδίων εξαρτάται απ' την ιδιοτιμή m , για λόγους διάκρισης τον ονομάζουμε TM_m . Για τον ίδιο λόγο μιλάμε για το ρυθμό TE_m , ο οποίος δίνει πεδία της μορφής :

$$\left. \begin{aligned} H_z &= H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{b} x\right) e^{-\gamma_m z} \\ H_x &= -H_0 \left[\gamma_m / \left(\frac{m\pi}{b}\right) \right] \sin\left(\frac{m\pi}{b} x\right) e^{-\gamma_m z} \\ E_y &= -H_0 \left[j\omega\mu / \left(\frac{m\pi}{b}\right) \right] \sin\left(\frac{m\pi}{b} x\right) e^{-\gamma_m z} \end{aligned} \right\} \quad (2-26)$$

Και στις δύο περιπτώσεις ρυθμών μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι η σταθερή διάδοσης γ_m είναι της ίδιας μορφής :

$$\gamma_m = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 - k^2} \quad (2-27)$$