

Σύνολα-Απεικονίσεις

1. ΣΥΝΟΛΑ

Κάθε συλλογή από αντικείμενα ονομάζεται *σύνολο*: τα αντικείμενα αυτά είναι τα *στοιχεία* του συνόλου. Ένας τρόπος για να παραστήσουμε ένα σύνολο X είναι να γράψουμε όλα τα στοιχεία του, π.χ.

$$X = \{\alpha, \beta, 3, 7, *, ?\}.$$

Ένας άλλος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε μία χαρακτηριστική ιδιότητα των στοιχείων του: λέμε ότι το σύνολο X αποτελείται από όλα εκείνα τα αντικείμενα που έχουν την ιδιότητα P και γράφουμε

$$X = \{x/x \text{ έχει την ιδιότητα } P\}.$$

Χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς

$$x \in X \text{ και } x \notin X$$

για να δηλώσουμε ότι το x είναι ή δεν είναι στοιχείο του συνόλου X .

Λέμε ότι ένα σύνολο X είναι *υποσύνολο* ενός συνόλου Y και γράφουμε $X \subseteq Y$, α κάθε στοιχείο του X είναι και στοιχείο του Y .

Δύο σύνολα X και Y λέγονται *ίσα μεταξύ τους* (συμβολισμός $X = Y$) αν

$$X \subseteq Y \text{ και } Y \subseteq X$$

δηλαδή αν έχουν τα ίδια στοιχεία.

Αν λοιπόν τα X και Y δεν είναι ίσα μεταξύ τους, $X \neq Y$, τούτο σημαίνει ότι υπάρχει έ στοιχείο του X που δεν ανήκει στο Y ή ότι υπάρχει ένα στοιχείο του Y που δεν είναι στοιχείο του X .

Στην περίπτωση που $X \subseteq Y$ και $X \neq Y$, λέμε ότι το X είναι *γνήσιο υποσύνολο* το και το συμβολίζουμε $X \subset Y$.

Το *κενό* σύνολο \emptyset (δηλαδή το σύνολο που στερείται στοιχείων) θεωρείται υποσύνολο κάθε συνόλου.

Με $\mathcal{P}(X)$ παριστάνουμε το σύνολο όλων των υποσυνόλων του X .

Στο εξής, με \mathbb{N} θα συμβολίζουμε το σύνολο των *φυσικών αριθμών*, δηλαδή

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

με \mathbb{Z} το σύνολο των *ακεραίων αριθμών*, δηλαδή

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

με \mathbb{Q} το σύνολο των *ρητών αριθμών*, δηλαδή

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} / m, n \in \mathbb{Z} \text{ και } n \neq 0 \right\},$$

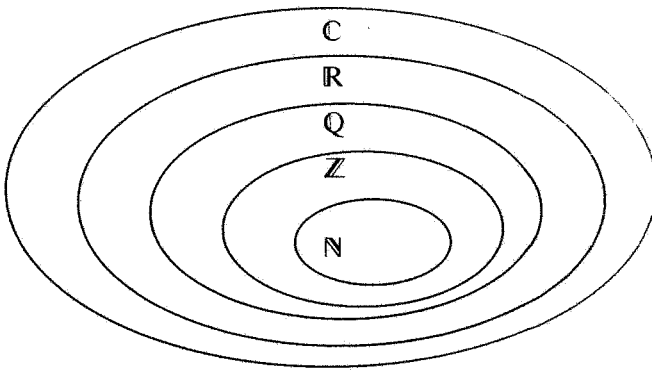
με \mathbb{R} το σύνολο των *πραγματικών αριθμών* και με \mathbb{C} το σύνολο των *μγαδικών αριθμών*

Είναι $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ αφού $-2 \in \mathbb{Z}$ και $-2 \notin \mathbb{N}$

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ αφού $\frac{5}{2} \in \mathbb{Q}$ και $\frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ αφού $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$ και $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

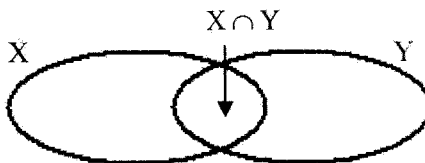
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ αφού $-i \in \mathbb{C}$ και $-i \notin \mathbb{R}$.



2. ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΑΝΩ ΣΕ ΣΥΝΟΛΑ

Ονομάζουμε *τομή* δύο συνόλων X και Y και τη συμβολίζουμε $X \cap Y$, το σύνολο όλων των στοιχείων που ανήκουν ταυτόχρονα στα X και Y , δηλαδή

$$X \cap Y = \{x/x \in X \text{ και } x \in Y\}$$



Η τομή έχει τις παρακάτω ιδιότητες

$$\begin{aligned} X \cap X &= X \\ X \cap Y &= Y \cap X \\ X \cap (Y \cap Z) &= (X \cap Y) \cap Z. \end{aligned}$$

Ονομάζουμε **ένωση** των X και Y και γράφουμε $X \cup Y$, το σύνολο όλων των στοιχείων που ανήκουν είτε στο X , είτε στο Y , δηλαδή

$$X \cup Y = \{x/x \in X \text{ είτε } x \in Y\}$$



(Το $X \cup Y$ είναι όλο το σκιασμένο μέρος).

Η ένωση έχει τις επόμενες ιδιότητες

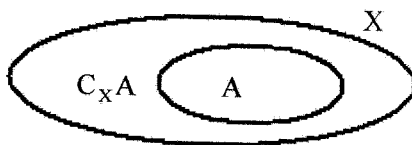
$$\begin{aligned} X \cup X &= X \\ X \cup Y &= Y \cup X \\ X \cup (Y \cup Z) &= (X \cup Y) \cup Z. \end{aligned}$$

Η ένωση και η τομή συνδέονται μεταξύ τους με τις σχέσεις

$$\begin{aligned} X \cap (Y \cup Z) &= (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \\ X \cup (Y \cap Z) &= (X \cup Y) \cap (X \cup Z) \end{aligned}$$

Αν X είναι ένα σύνολο και A ένα υποσύνολο του τότε το **συμπλήρωμα** του A ως προς X (συμβολισμός $C_X A$) είναι το σύνολο όλων των στοιχείων του X που δεν είναι στοιχεία του A , δηλαδή

$$C_X A = \{x/x \in X \text{ και } x \notin A\}.$$



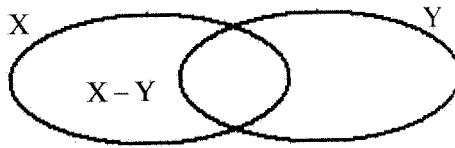
Το σύμβολο « C_X » έχει τις επόμενες ιδιότητες

$$\begin{aligned} C_X(C_X A) &= A, \quad C_X(X) = \emptyset, \quad C_X(\emptyset) = X \\ A \cap (C_X A) &= \emptyset, \quad A \cup (C_X A) = X \\ C_X(A \cap B) &= (C_X A) \cup (C_X B) \\ C_X(A \cup B) &= (C_X A) \cap (C_X B). \end{aligned}$$

Άσκηση 1.1. Να αποδειχθούν οι παραπάνω ιδιότητες.□

Γενικότερα μπορούμε να ορίσουμε τη **διαφορά** δύο συνόλων X και Y ως εξής:

$$X - Y = \{x / x \in X \text{ και } x \notin Y\}.$$



Με άλλα λόγια το $X - Y$ έχει ως στοιχεία όλα τα στοιχεία του X που δεν είναι στοιχεία του Y . Έτσι για παράδειγμα

$$\mathbb{C} - \mathbb{R} = \{z / z \in \mathbb{C} \text{ και } z \notin \mathbb{R}\} = \{z / z \in \mathbb{C} \text{ και } \text{Im}(z) \neq 0\}.$$

Τέλος η **συμμετρική διαφορά** δύο συνόλων X και Y ορίζεται από

$$X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X).$$



Εισάγουμε τώρα μια άλλη πράξη η οποία θα μας επιτρέψει να κατασκευάσουμε νέα μαθηματικά αντικείμενα. Η πράξη αυτή συνίσταται, στην κατασκευή με τη βοήθεια δύο μαθηματικών αντικειμένων x και y , ενός τρίτου αντικειμένου που το συμβολίζουμε (x, y)

και το ονομάζουμε **διατεταγμένο ζεύγος**.

Ο σχηματισμός διατεταγμένων ζευγών υπόκειται σε ένα μόνο αξίωμα: για να έχουμε

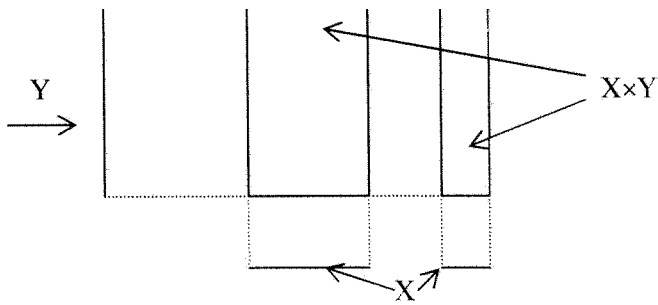
$$(x, y) = (x', y')$$

πρέπει και αρκεί

$$x = x' \text{ και } y = y'.$$

Το **καρτεσιανό γινόμενο** $X \times Y$ δύο συνόλων X και Y είναι το σύνολο που σχηματίζεται από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη (x, y) , όταν το x διατρέχει το σύνολο X και το y διατρέχει το σύνολο Y , δηλαδή

$$X \times Y = \{(x, y) / x \in X \text{ και } y \in Y\}.$$



Το καρτεσιανό γινόμενο συνόλων έχει τις επόμενες ιδιότητες:

$$X \times (Y \cap Z) = (X \times Y) \cap (X \times Z)$$

$$X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z).$$

Γενίκευση: αν έχουμε n αντικείμενα x_1, x_2, \dots, x_n μπορούμε τότε να κατασκευάσουμε ένα άλλο αντικείμενο που το συμβολίζουμε

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

και το ονομάζουμε *διατεταγμένη n -άδα* με τη μόνη αξίωση

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

τότε και μόνο όταν

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad \dots, \quad x_n = y_n.$$

Ονομάζουμε *καρτεσιανό γινόμενο*

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$$

των συνόλων X_1, X_2, \dots, X_n το σύνολο όλων των διατεταγμένων n -άδων (x_1, x_2, \dots, x_n) που μπορούμε να κατασκευάσουμε όταν το x_1 διατρέχει το σύνολο X_1 , το x_2 διατρέχει το σύνολο X_2 , κ.ο.κ. το x_n διατρέχει το σύνολο X_n , δηλαδή

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n\}.$$

Στα Μαθηματικά μια έννοια συχνά χρήσιμη είναι εκείνη της οικογένειας που ορίζεται ως εξής: ας είναι I ένα σύνολο. Αν για κάθε $i \in I$ επιλέξουμε ένα σύνολο X_i , σχηματίζουμε μια *οικογένεια συνόλων με δείκτες* από το I : τη συμβολίζουμε

$$(X_i)_{i \in I}.$$

Οι πράξεις της ένωσης και της τομής δύο συνόλων όπως τις ορίσαμε στην αρχή επεκτείνονται χωρίς κόπο σε μια οποιαδήποτε οικογένεια συνόλων $(X_i)_{i \in I}$. Έτσι:

- η *ένωση* των X_i που σημειώνεται $\bigcup_{i \in I} X_i$, είναι το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν τουλάχιστον σ' ένα X_i

$$\bigcup_{i \in I} X_i = \{x / \text{υπάρχει } i \in I \text{ ώστε } x \in X_i\}$$

- η **τομή** των X_i , που σημειώνεται $\bigcap_{i \in I} X_i$, είναι το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν ταυτόχρονα σ' όλα τα X_i

$$\bigcap_{i \in I} X_i = \{x / x \in X_i \text{ για κάθε } i \in I\}.$$

Ένα αξιοσημείωτο είδος οικογένειας συνόλων είναι ό,τι ονομάζουμε **διαμελισμό** ενός συνόλου.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2.1. Ας είναι X ένα σύνολο. Μια οικογένεια $(X_i)_{i \in I}$ από μη-κενά υποσύνολα του X λέμε ότι **διαμελίζει** το X αν:

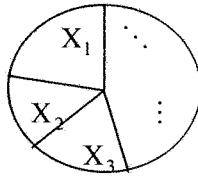
1) τα X_i καλύπτουν ολόκληρο το X , δηλαδή

$$X = \bigcup_{i \in I} X_i$$

και

2) δύο διαφορετικά σύνολα της οικογένειας δε συναντώνται, δηλαδή

$$i \neq j \Rightarrow X_i \cap X_j = \emptyset.$$



Για παράδειγμα ας πάρουμε $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Τότε τα σύνολα

$$\{1,2,3\}, \{4,5,6\}, \{7,8\}, \{9\}$$

διαμελίζουν το X , ενώ τα

$$\{1,2,3\}, \{3,4,5\}, \{7,8,9\}$$

δεν το διαμελίζουν αφού τα δύο πρώτα συναντώνται, ενώ η ένωση τους δεν καλύπτει ολόκληρο το X .

Το πλήθος των διαμελισμών του συνόλου $\{1,2,\dots,n\}$ ονομάζεται ***n*-οστός αριθμός του Bell** και συμβολίζεται S_n .

Για παράδειγμα, $S_2 = 2$ αφού υπάρχουν δύο μόνο διαμελισμοί του $\{1,2\}$.

Οι διαμελισμοί του συνόλου $\{1,2,3\}$ είναι οι ακόλουθοι:

$$\begin{aligned} & \{1,2,3\} \\ & \{1\}, \{2,3\} \\ & \{2\}, \{1,3\} \\ & \{3\}, \{1,2\} \\ & \{1\}, \{2\}, \{3\} \end{aligned}$$

Σύνολα-Απεικονίσεις

1. ΣΥΝΟΛΑ

κάθε συλλογή από αντικείμενα ονομάζεται **σύνολο**. Τα αντικείμενα αυτά είναι τα **μέλη** του συνόλου. Ένας τρόπος για να παραστήσουμε ένα σύνολο X είναι να

$$X = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \dots \}$$

ήνας άλλος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε μία χαρακτηριστική ιδιότητα των μελών του: λέμε ότι το σύνολο X αποτελείται από όλα εκείνα τα αντικείμενα που

$$X = \{ x/x \text{ έχει την ιδιότητα } P \}$$

χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς

$$x \in X \text{ και } x \notin X$$

δηλώνουμε ότι το x είναι ή δεν είναι στοιχείο του συνόλου X .
 λέμε ότι ένα σύνολο X είναι **υπόσύνολο** ενός συνόλου Y και γράφουμε $X \subseteq Y$, αν

στοιχείο του X είναι και στοιχείο του Y .
 δύο σύνολα X και Y λέγονται **ισάμετρα** τους (συμβολισμός $X = Y$) αν

$$X \subseteq Y \text{ και } Y \subseteq X$$

ή αν έχουν τα ίδια στοιχεία.

υπάρχουν τα X και Y δεν είναι ίσα μεταξύ τους, $X \neq Y$, τούτο σημαίνει ότι υπάρχει ένα

στοιχείο του X .

την περίπτωση που $X \subseteq Y$ και $X \neq Y$, λέμε ότι το X είναι **γνήσιο υπόσύνολο** του Y

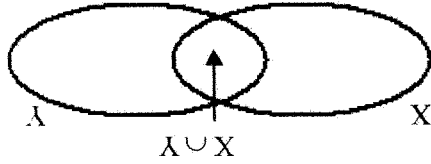
στοιχείο του $X \subseteq Y$.

ο **κενό** σύνολο \emptyset (δηλαδή το σύνολο που στερείται στοιχείων) θεωρείται

υπόσύνολο κάθε συνόλου.

Το $\mathcal{P}(X)$ παριστάνουμε το σύνολο όλων των υποσυνόλων του X .

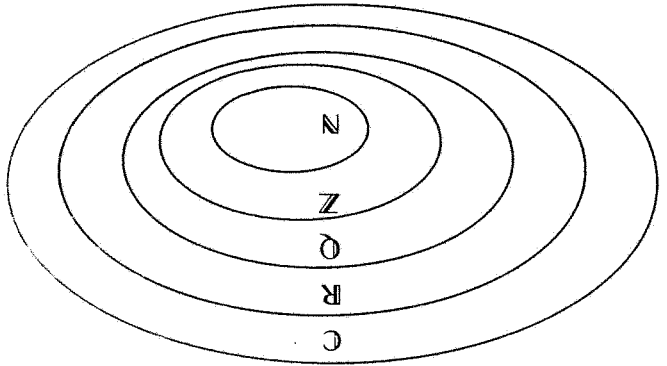
ήτοι με N θα συμβολίζουμε το σύνολο των **φυσικών αριθμών**, δηλαδή



$$X \cap Y = \{x/x \in X \text{ και } x \in Y\}$$

ορίζουμε **τομή** δύο συνόλων X και Y και τη συμβολίζουμε $X \cap Y$, το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν ταυτόχρονα στα X και Y, δηλαδή

2. ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΑΝΩ ΣΕ ΣΥΝΟΛΑ



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ αφού $-2 \in \mathbb{Z}$ και $-2 \notin \mathbb{N}$
 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ αφού $\frac{5}{2} \in \mathbb{Q}$ και $\frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$
 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ αφού $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$ και $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$
 $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ αφού $-i \in \mathbb{C}$ και $-i \notin \mathbb{R}$.

σύνολο των **πραγματικών αριθμών** και με \mathbb{C} το σύνολο των **μηγαδικών αριθμών**.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} / m, n \in \mathbb{Z} \text{ και } n \neq 0 \right\}.$$

σύνολο των **ημιτιμών αριθμών**, δηλαδή

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$$

σύνολο των **ακεραίων αριθμών**, δηλαδή

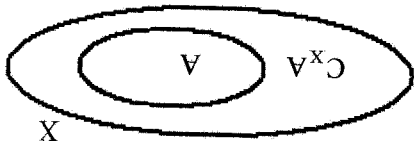
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

σμήλογο « C^x » έχει τις ερήμενες ιδιότητες

$$C^x(C^x A) = A, C^x(X) = \emptyset, C^x(\emptyset) = X$$

$$A \cap (C^x A) = \emptyset, A \cup (C^x A) = X$$

$$C^x(A \cap B) = (C^x A) \cap (C^x B)$$

$$C^x(A \cup B) = (C^x A) \cup (C^x B).$$


$$C^x A = \{x/x \in X \text{ και } x \notin A\}.$$

Αν X είναι ένα σύνολο και A ένα υποσύνολο του τότε το **σμπλήρωμα** του A ως προς X (σμπλήρωμας $C^x A$) είναι το σύνολο όλων των στοιχείων του X που δεν είναι μέλη του A , δηλαδή

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$$

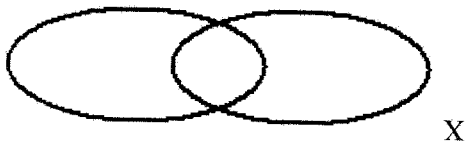
$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap Z.$$

$$X \cup Y = Y \cup X$$

$$X \cap X = X$$

Η ένωση έχει τις ερήμενες ιδιότητες

ο $X \cup Y$ είναι ένα το κτισμένο μέρος).



$$X \cup Y = \{x/x \in X \text{ είτε } x \in Y\}$$

Ονομάζουμε **ένωση** των X και Y και γράφουμε $X \cup Y$, το σύνολο όλων των στοιχείων που ανήκουν είτε στο X , είτε στο Y , δηλαδή

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z).$$

$$X \cup Y = Y \cup X$$

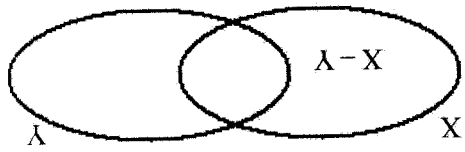
$$X \cap X = X$$

Η τομή έχει τις παρακάτω ιδιότητες

ληση 1.1. Να αποδείξετε οι παρακάτω ιδιότητες. □

εφα μπορούμε να ορίσουμε τη **διαφορά** δύο συνόλων X και Y ως εξής:

$$X - Y = \{x/x \in X \text{ και } x \notin Y\}.$$



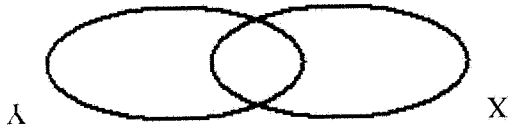
να λόγια το $X - Y$ έχει ως στοιχεία όλα τα στοιχεία του X που δεν είναι στοιχεία

Ετσι για παράδειγμα

$$\mathbb{C} - \mathbb{R} = \{z/z \in \mathbb{C} \text{ και } z \notin \mathbb{R}\} = \{z/z \in \mathbb{C} \text{ και } \text{Im}(z) \neq 0\}.$$

η **συμμετρική διαφορά** δύο συνόλων X και Y ορίζεται από

$$X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X).$$



εάνουμε τόρα μια άλλη πράξη η οποία θα μας επιτρέψει να κατασκευάσουμε νέα αντικείμενα. Η πράξη αυτή ονομάζεται στην κατασκευή τη **βήθεια** δύο αντικείμενων x και y, ενός πρώτου αντικείμενου που ονομάζεται **επίδομα** (y, x)

ονομάζουμε **διαμετρική διαφορά**:

σχηματικής διαμετρικών υφολών οδκείται σε ένα μόνο αζήτωμα:

$$(y, x) = (x, y')$$

και αρκεί

$$x = x' \text{ και } y = y'.$$

καρτεσιανό γινόμενο $X \times Y$ δύο συνόλων X και Y είναι το σύνολο που

από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη (x, y) , όπου x το σύνολο X και

επίσης το σύνολο Y, δηλαδή

$$X \times Y = \{(x, y) / x \in X \text{ και } y \in Y\}.$$

$$\bigcup_{i \in I} X_i = \{x \mid \exists i \in I \text{ such that } x \in X_i\}$$

ή κοινού τουλάχιστον ένα X_i

η ένωση των X_i που σημειώνεται $\bigcup_{i \in I} X_i$, είναι το σύνολο των στοιχείων που κλείνονται ως προς μια οποιαδήποτε οικογένεια συνόλων $(X_i)_{i \in I}$. Έτσι:

Οι πράξεις της ένωσης και της τομής δύο συνόλων όπως τις ορίσαμε στην αρχή,

$$(X_i)_{i \in I}$$

ήματιζουμε για *οικογένεια συνόλων με δείκτες* από το I . τη συμβολίζουμε

Ένα Μαθηματικά μια έννοια συχνά χρήσιμη είναι εκείνη της οικογένειας που ορίζεται ως εξής: ας είναι I ένα σύνολο. Αν για κάθε $i \in I$ επιλέξουμε ένα σύνολο X_i ,

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n\}$$

σύνολο X_2 , κ.ο.κ. το x^n διατρέχει το σύνολο X^n , δηλαδή

υπονοείται να κατασκευάσουμε όταν το x^1 διατρέχει το σύνολο X^1 , το x^2 διατρέχει το σύνολο X^2 , ..., το x^n διατρέχει το σύνολο X^n .

$$X^1 \times X^2 \times \dots \times X^n$$

Ονομάζουμε *καρτεσιανό γινόμενο*

$$X^1 = Y^1, X^2 = Y^2, \dots, X^n = Y^n$$

τε και μόνο όταν

$$(X^1, X^2, \dots, X^n) = (Y^1, Y^2, \dots, Y^n)$$

το οποίο έχουμε *διατεταγμένη n-άδα* με τη μόνη αξίωση

$$(X^1, X^2, \dots, X^n)$$

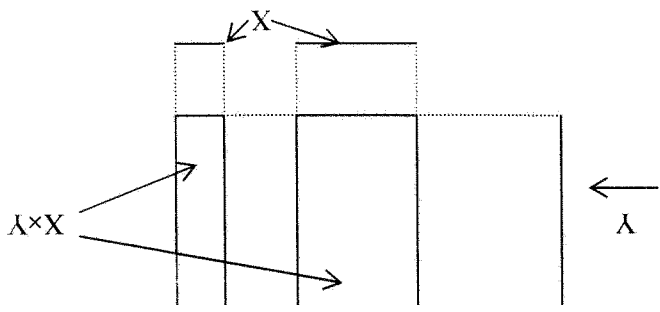
αλλά αντikeίμενο που το συμβολίζουμε

Γενικότερα: αν έχουμε n αντικείμενα X^1, X^2, \dots, X^n μπορούμε τότε να κατασκευάσουμε

$$(X \times Z) \cap (Y \times X) = (Z \cap Y) \times X$$

$$(X \times Z) \cap (Y \times X) = (Z \cap Y) \times X$$

καρτεσιανό γινόμενο συνόλων έχει τις επόμενες ιδιότητες:



η **τοιμή** των X_i που σημειώνεται $\bigcup_{i \in I} X_i$, είναι το σύνολο των στοιχείων που ταυτόχρονα σ' όλα τα X_i

$$\bigcap_{i \in I} X_i = \{x / x \in X_i \text{ για κάθε } i \in I\}.$$

αξιοσημείωτο είδος οικογένειας συνόλων είναι ό,τι ονομάζουμε **διαμερίσιμη** ενός

ΠΡΟΣ 12.1. Αγ είναι X ένα σύνολο. Μια οικογένεια $(X_i)_{i \in I}$ από μη-κενά

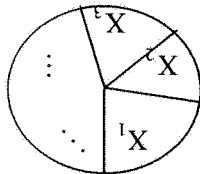
αυ του X λέμε ότι **διαμερίζεται** το X αν:

1) τα X_i καλύπτουν ολόκληρο το X , δηλαδή

$$X = \bigcup_{i \in I} X_i$$

2) δύο διαφορετικά σύνολα της οικογένειας δε συναντώνται, δηλαδή

$$i \neq j \Rightarrow X_i \cap X_j = \emptyset.$$



είδημα ως παράδειγμα $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Τότε τα σύνολα

$$\{1,2,3\}, \{4,5,6\}, \{7,8\}, \{9\}$$

ούν το X , ενώ τα

$$\{1,2,3\}, \{3,4,5\}, \{7,8,9\}$$

αμελλούν αφού τα δύο πρώτα συναντώνται, ενώ η ένωση τους δεν καλύπτει

ο το X .

Άθροισ των διαμερισμών του συνόλου $\{1,2,\dots,n\}$ ονομάζεται ***n-οστός αριθμός*** και συμβολίζεται S_n .

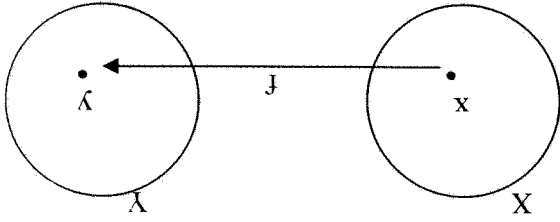
παράδειγμα, $S_2 = 2$ αφού υπάρχουν δύο μόνο διαμερισμοί του $\{1,2\}$,

αίσημοι του συνόλου $\{1,2,3\}$ είναι οι ακόλουθοι:

- $\{1,2,3\}$
- $\{1\}, \{2,3\}$
- $\{2\}, \{1,3\}$
- $\{3\}, \{1,2\}$
- $\{1\}, \{2\}, \{3\}$
- $\{1\}$
- $\{2\}$
- $\{3\}$
- \emptyset

3. ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

Νομιάζουμε **απεικόνιση** (ή **συνάρτηση**) από ένα σύνολο X σ' ένα σύνολο Y , ένα ντισμό f που από κάθε στοιχείο του X παράγει ακριβώς ένα στοιχείο του Y .



Το μοναδικό αυτό για το x στοιχείο y , ονομάζεται **εικόνα** του x μέσω της f και βολίζεται $f(x)$. Το X είναι το **σύνολο αφής** της f , ενώ το Y το **σύνολο άφής**. Χρησιμοποιούμε έναν από τους ακόλουθους συμβολισμούς

$$f: X \rightarrow Y \quad \text{ή} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

να σημειώσουμε μια απεικόνιση από το X στο Y , ενώ για να δείξουμε ότι η απεικόνιση $f: X \rightarrow Y$ στέλνει το στοιχείο x του X στο στοιχείο y του Y γράφουμε

$$y = f(x) \quad \text{ή} \quad x \mapsto y.$$

Ετσι, αν για παράδειγμα θέλουμε να μιλήσουμε για την απεικόνιση του f του \mathbb{C} στο \mathbb{C} στέλνει το z στο $z^2 + 1$, θα γράφουμε

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = z^2 + 1$$

$$\text{ή} \quad f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto z^2 + 1.$$

εξής θα συμβολίζουμε Y το σύνολο των απεικονίσεων από το X στο Y .

Ιδιότητα απεικονίσεων. Αγ είναι f και g δύο απεικονίσεις με κοινό σύνολο αφής και κοινό σύνολο άφής το Y

$$f: X \rightarrow Y \quad \text{και} \quad g: X \rightarrow Y.$$

τα κάθε $x \in X$ συμβαίνει

$$f(x) = g(x)$$

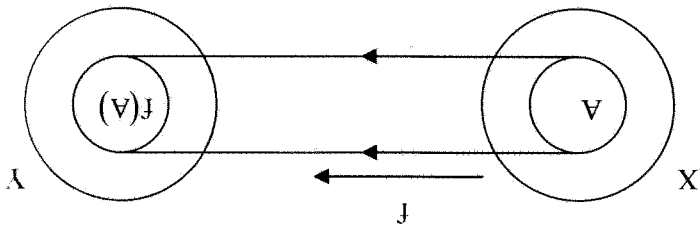
οι απεικονίσεις f και g λέγμε ότι είναι **ίσες** μεταξύ τους

$$f = g.$$

Ετσι δύο απεικονίσεις που έχουν σύνολα αφής διαφορετικά, ή σύνολα άφής διαφορετικά, δεν θεωρούνται **ίσες**.

Παράδειγμα 1.1. Αγ πάρουμε τις ακόλουθες απεικονίσεις

$$f, g: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{\alpha, \beta, \gamma\}$$



Έστω $f: X \rightarrow Y$ μία απεικόνιση, A ένα υποσύνολο του X και B ένα υποσύνολο του Y .

Άσκηση 1.2. Να αποδείξετε τις παρακάτω σχέσεις. □

$$i) \quad \phi_{A \setminus B} = \phi_A \cdot \phi_B^c = \phi_A (1 - \phi_B).$$

$$ii) \quad \phi_{A \cup B} = \phi_A + \phi_B - \phi_A \cdot \phi_B$$

$$iii) \quad \phi_{A \cap B} = \phi_A \cdot \phi_B$$

$$iv) \quad \phi_{A^c} = 1 - \phi_A$$

$$v) \quad A = B \Leftrightarrow \phi_A = \phi_B$$

$$vi) \quad A \subseteq B \Leftrightarrow \phi_A \leq \phi_B$$

α) $A, B \subseteq X$ ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\phi_A(x) = 0 \quad \text{αν } x \notin A \text{ (δηλαδή αν } x \in C^X A).$$

$$\phi_A(x) = 1 \quad \text{αν } x \in A$$

οπου ϕ_A το χαρακτηριστικό της A .

Άσκηση 1.3. Ας είναι X ένα σύνολο και A ένα υποσύνολο του. Ονομάζουμε *χαρακτηριστική συνάρτηση του A* την απεικόνιση $\phi_A: X \rightarrow \{0,1\}$ που ορίζεται με τον

η ϕ_A λέμε *χαρακτηριστική απεικόνιση* του X . □

$$I_X: X \rightarrow X, \quad I_X(x) = x$$

Άσκηση 1.2. Σε κάθε σύνολο X , αντιστοιχεί μια απεικόνιση

δηλαδή με τον προηγούμενο ορισμό $f \neq g$. □

δηλαδή διαφέρουν οι τιμές τους μόνο σ' ένα στοιχείο, στο 2 .

$$f(1) = g(1), \quad f(2) \neq g(2), \quad f(3) = g(3)$$

αποδεικνύεται ότι οι f και g έχουν το ίδιο σύνολο αφετηρίας και άφιξης ενώ

$$f(1) = \alpha, \quad g(1) = \alpha$$

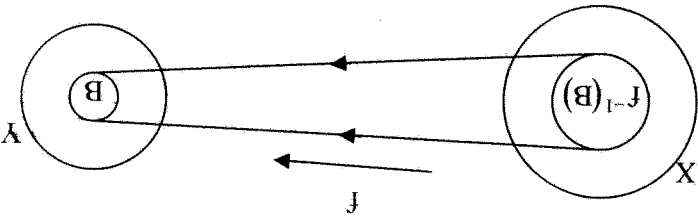
$$f(2) = \alpha, \quad g(2) = \beta$$

$$f(3) = \gamma, \quad g(3) = \gamma$$

$$f(1) = \alpha, \quad g(1) = \alpha$$

Ονομάζουμε **εικόνα** του A μέσω της f -συμβολισμός $f(A)$ - το σύνολο των στοιχείων του A, δηλαδή $f(A) = \{f(x) / x \in A\}$.

Ονομάζουμε **αντίστροφη εικόνα** του B μέσω της f -συμβολισμός $f^{-1}(B)$ - το σύνολο των στοιχείων του X που η f τα στέλνει μέσα στο B, δηλαδή $f^{-1}(B) = \{x/x \in X \text{ και } f(x) \in B\}$.



Τα παράδειγμα αν έχουμε την απεικόνιση $f : \{1,2,3,4,5\} \rightarrow \{a,b,\gamma\}$

$$f(1) = f(3) = f(5) = \beta, \\ f(2) = a, \quad f(4) = \gamma$$

ε η εικόνα του υποσυνόλου $\{2,3,5\}$ είναι το $\{a,\beta\}$, δηλαδή

$$f(\{2,3,5\}) = \{a,\beta\}$$

η αντίστροφη εικόνα των υποσυνόλων $\{a,\beta\}$ και $\{\gamma\}$ είναι αντίστοιχα $\{1,2,3,5\}$ και , δηλαδή

$$f^{-1}(\{a,\beta\}) = \{1,2,3,5\} \text{ και } f^{-1}(\{\gamma\}) = \{4\}.$$

4. ΕΙΝΑΙ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣΝ

Από τον ορισμό μιας απεικόνισης $f : X \rightarrow Y$ φαίνεται ότι είναι δυνατό δυο πορτικά στοιχεία του X να τα στέλνει η f στο ίδιο στοιχείο του Y. Η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x = x^2)$ για παράδειγμα, στέλνει τα στοιχεία -2 και 2 στο ίδιο στοιχείο 4, κλπ. Η προηγούμενη παρατήρηση οδηγεί στον ερμηνεύσιμο ορισμό:

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.4.1. Μια απεικόνιση $f: X \rightarrow Y$ ονομάζεται *ένθετη* (ή *1-1*) αν για κάθε

$$(1) \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

αν στέλνει διαφορετικά στοιχεία του X σε διαφορετικά στοιχεία του Y .

πιο εύχρηστη μορφή της συνθήκης (1) είναι η

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

απεικόνιση

$$g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, g(n) = 3n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ση από

$$g(n) = g(m) \Leftrightarrow 3n = 3m \Leftrightarrow n = m$$

5) μπορούμε το φυσικό αριθμό 5, δεν υπάρχει στοιχείο n του \mathbb{N} τέτοιο ώστε $g(n) = 5$.

α) δυνατό δηλαδή για μια απεικόνιση $f: X \rightarrow Y$ να υπάρχουν στοιχεία του Y τα

εν είναι εικόνες στοιχείων του X .

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.4.2. Η $f: X \rightarrow Y$ θα λέγεται *έμφθετη* (ή *επι*) αν για κάθε στοιχείο y του Y με να βρούμε ένα στοιχείο x του X τέτοιο ώστε $f(x) = y$, δηλαδή αν

$$f(X) = Y.$$

είδων:

δυνατότητας τώρα τους δύο παραλληλόμενους ορισμούς παίρνουμε ένα τρίτο είδος

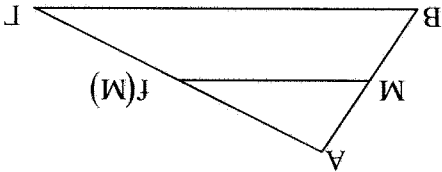
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.4.3. Μια απεικόνιση $f: X \rightarrow Y$ τη λέμε *αμφίθετη* αν είναι ταυτόχρονα

α) περιτιθέμενο παράδειγμα αμφίθετης είναι η ταυτόσημη απεικόνιση $I_X: X \rightarrow X$ για

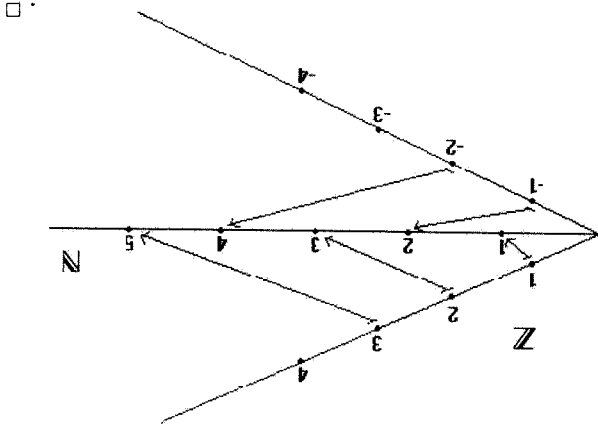
κάθε X .

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.4. Θεωρούμε το τρίγωνο ABT . Για κάθε σημείο M της πλευράς AB έχουμε με $f(M)$ το σημείο που η παράλληλη προς τη BT , η αγόμενη από το M ,

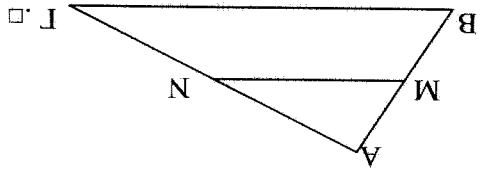
τη AT :



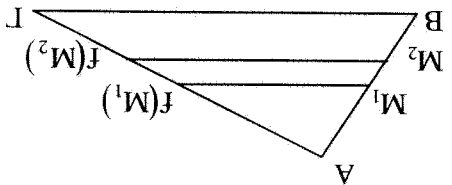
Η ερμηνεία πρόταση είναι σημαντική γιατί μας δίνει πληροφορίες για απεικονίσεις f που περιερασμένον συνόλων.



Παράδειγμα 1.5. Η παρακάτω διάταξη ορίζει μια αμφίσημη από το σύνολο Z των \mathbb{Z} στον \mathbb{N} των φυσικών αριθμών



Από την άλλη μεριά αν N είναι ένα άλλο σημείο του $A\Gamma$, τότε το σημείο τομής M της με την παράλληλη προς την $B\Gamma$, που άγεται από N , έχει την ιδιότητα $f(M) = N$, δηλ η f είναι έφεση.



Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι πρόκειται για αμφίσημη. Πράγματι, $M_1 \neq M_2$ ανάγεται $f(M_1) \neq f(M_2)$. Δηλαδή η f είναι έφεση.

Ενώ αυτό ορίζεται μια απεικόνιση f από το σύνολο $[A, B]$ των σημείων του Γ στο σύνολο $[A, \Gamma]$ των σημείων του εμβόλιμου τμήματος $A\Gamma$.

$$f: \{x_1, \dots, x_m\} \rightarrow \{y_1, \dots, y_n\}$$

(Α) Αν η f είναι ένεση ($1-1$), τότε $m \leq n$.

(Β) Αν η f είναι έφεση (επι), τότε $m \geq n$.

(Γ) Αν η f είναι αμφίεση, τότε $m = n$.

πρόδειξη. (α) Αν η f είναι ένεση τότε τα στοιχεία $f(x_1), \dots, f(x_m)$ του συνόλου

$\{y_1, \dots, y_n\}$ είναι ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους, οπότε $m \leq n$.

η f είναι έφεση, τότε το σύνολο $\{f(x_1), \dots, f(x_m)\}$ καλύπτει το σύνολο $\{y_1, \dots, y_n\}$

και $m \geq n$.

η f είναι αμφίεση, τότε η f είναι ένεση και έφεση, οπότε $m \leq n$ και $m \geq n$, δηλαδή

□

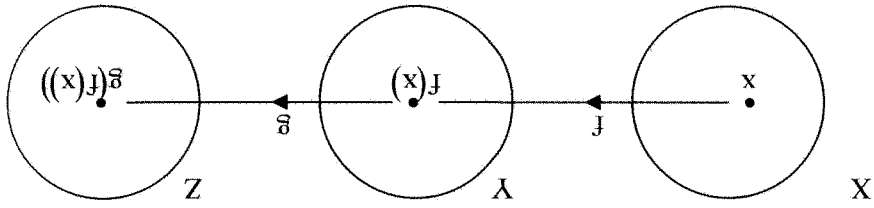
5. ΣΥΝΘΕΣΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ

ορίστε δύο απεικονίσεις

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z.$$

το στοιχείο x του X , η f αντιστοιχείει ένα μοναδικό στοιχείο $y = f(x)$ του Y . Η g

εισάγει αυτό το y με τη σειρά της σε ένα μοναδικό στοιχείο $z = g(y)$ του Z .



την προηγούμενη διαδικασία σε κάθε στοιχείο x του X αντιστοιχίσαμε ένα

δικό στοιχείο $g(f(x))$ του Z . Μ'άλλα λόγια ορίσαμε μια απεικόνιση του X στο Z ,

$$g \circ f: X \rightarrow Z, (g \circ f)(x) = g(f(x)), \text{ για κάθε } x \in X.$$

η συμβολίζουμε $g \circ f$ και την ονομάζουμε **σύνθεση** των f και g :

και τότε και μόνο όταν το σύνολο αφίξης της f συμπίπτει με το σύνολο αφετηρίας της

$g \circ f$ είναι ένα υποσύνολο του X , τότε η εικόνα του από την $g \circ f$ είναι

$$(g \circ f)(A) = g(f(A)),$$

αν C είναι ένα υποσύνολο του Z , τότε η αντίστροφη εικόνα του από την $g \circ f$ είναι

$$f: \mathbb{N} \leftarrow \mathbb{N}, \quad f(n) = n^2 + 1$$

$$g: \mathbb{N} \leftarrow \mathbb{N}, \quad g(n) = n + 1.$$

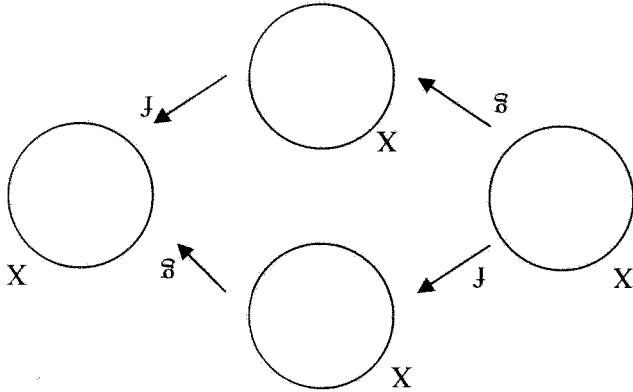
As θεωρησουμε

θαλνει οπως φαίνεται στο παρακάτω παραδειγμα.

Εδωλα κάποιος μπορεί να διερωτηθεί αν η $g \circ f$ είναι ίση με την $f \circ g$. Ένικά αυτό δεν

στο X .

1 φανερό ότι οι συνθέσεις $g \circ f$ και $f \circ g$ ορίζονται και μάάλιστα είναι απεικονίσεις από



As πάρουμε τώρα δύο απεικονίσεις $f, g: X \leftarrow X$.

$g \circ f$ είναι έφση. □

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$$

η, υπάρχει $x \in X$ έτσι ώστε $f(x) = y$, οπότε

ο η g είναι έφση υπάρχει $y \in Y$ τέτοιο ώστε $g(y) = z$. Για το y αυτό, αφού η f είναι

As υποθέσουμε ότι οι f και g είναι έφσεις κι ως εκτέλεση ένα στοιχείο z του Z . Τότε

ιδή η $g \circ f$ είναι έφση.

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

As υποθέσουμε ότι οι f και g είναι έφσεις. τότε

$$f: X \leftarrow Y, \quad g: Y \leftarrow Z.$$

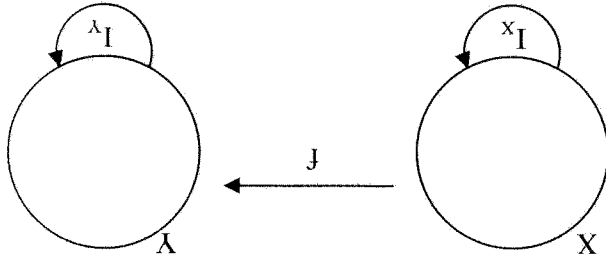
Απόδειξη. Θεωρούμε τις απεικονίσεις

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.5.1. Η σύνθεση δύο ενέσεων (έφσεων αντίστ.) είναι έφση (έφση)

$$(g \circ f)^{-1}(c) = f^{-1}(g^{-1}(c)).$$

$$(x)(x \circ f) = ((x) \circ f) = (x) \circ f$$

από το $x \in X$ έχουμε



να εξετάσουμε στη συνέχεια το πρόβλημα των απεικονίσεων στην απεικόνιση $f: X \leftarrow Y$ και I_X και I_Y αντίστοιχα. Το πρόβλημα των απεικονίσεων στην απεικόνιση $f: X \leftarrow Y$ και I_X και I_Y αντίστοιχα.

$$\square. (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

$$(x)(f \circ g) \circ h = (x)(f \circ (g \circ h))$$

να λάβουμε $x \in X$

$$(((x)(f \circ g) \circ h) = ((x)(f \circ (g \circ h)))$$

$$(((x)(f \circ g) \circ h) = ((x)(f \circ (g \circ h)))$$

να λάβουμε $x \in X$ έχουμε $(x)(f \circ g) \circ h = (x)(f \circ (g \circ h))$ και οι δύο έχουν ως σπυρίδα το X και ως σπυρίδα το T .

$$(h \circ g) \circ f \text{ και } h \circ (g \circ f).$$

απαιτούνται τις απεικονίσεις

$$f: X \leftarrow Y, \quad g: Y \leftarrow Z, \quad h: Z \leftarrow T$$

να απεικονίσει τις απεικονίσεις $f: X \leftarrow Y$, $g: Y \leftarrow Z$, $h: Z \leftarrow T$ να απεικονίσει τις απεικονίσεις $f: X \leftarrow Y$, $g: Y \leftarrow Z$, $h: Z \leftarrow T$.

από συνέπεια, η σύνθεση απεικονίσεων δεν είναι γενικά αντιμεταθετική. Είναι όμως

$$n^2 + 2 = n^2 + 2n + 2$$

η ιδιότητα

$$g \circ f \neq f \circ g$$

από

$$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(n+1) = (n+1)^2 + 1 = n^2 + 2n + 2.$$

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(n^2 + 1) = (n^2 + 1)^2 + 1 = n^4 + 2n^2 + 2$$

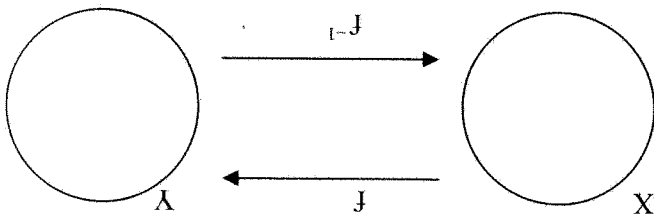
$$f \circ f^{-1} \circ I_Y = I_Y = (f^{-1} \circ f)(y) = f^{-1}(f(y)).$$

$$f^{-1} \circ f \circ I_X = I_X = (f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)).$$

αλλημεταξύ για κάθε $x \in X$ και $y \in Y$ έχουμε

$$f^{-1} \circ f \circ I_X = I_X, \quad f \circ f^{-1} \circ I_Y = I_Y.$$

Η f^{-1} ονομάζεται **αντίστροφή** της f και επαληθεύει τις σχέσεις



$$f^{-1}(f(x)) = x \Leftrightarrow f(f^{-1}(y)) = y.$$

Αν λοιπόν σε κάθε στοιχείο y του Y αντιστοιχίσουμε το μοναδικό $x \in X$ για το οποίο $f(x) = y$, ορίζουμε με αυτό τον τρόπο μια απεικόνιση f^{-1} του Y στο X , δηλαδή

$f^{-1}(f(x)) = x$ αν λάβουμε υπόψη ότι η f είναι ένεση παίρνουμε $x = x'$. □

Απόδειξη. Αφού η f είναι ένεση θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x \in X$ έτσι ώστε $f(x) = y$. Αν x' είναι ένα άλλο στοιχείο του X με $f(x') = y$, τότε από τη σχέση

$$y = f(x).$$

τοιο ώστε

ΛΗΜΜΑ 1.6.1. Για κάθε στοιχείο y του Y υπάρχει ένα και μόνο ένα στοιχείο x του X ,

θεωρούμε μια απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$.

6. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΜΙΑΣ ΑΜΦΙΕΣΗΣ

$$f \circ I_X = f = I_Y \circ f.$$

$$f(x) = I_Y(f(x)) = (I_Y \circ f)(x).$$

πρά συνέπεια

δείτε. Από τις σχέσεις

$$I^Y = I_{-J} \circ J, \quad X_I = J \circ I_{-J}$$

και μάλλον

$$J = (I_{-J})$$

ΠΡΩΤΗ 1.6.3. Η αντιστροφή απεικόνιση I_{-J} μιας αμφιέσης f είναι και αυτή

$$\square. I_{-J} \circ g = (J \circ g)$$

και αντιστροφή της f είναι η $I_{-J} \circ g$ και η αντιστροφή της $f \circ g$ είναι $I_{-J} \circ g$.

$$X_I = J \circ I_{-J} = (J \circ I) \circ I_{-J} = [J \circ (g \circ I_{-J})] \circ I_{-J} = [(J \circ g) \circ I_{-J}] \circ I_{-J} = (J \circ g) \circ (I_{-J} \circ I_{-J})$$

$$Z_I = I_{-J} \circ g = (I_{-J} \circ I) \circ g = [I_{-J} \circ (J \circ f)] \circ g = [(I_{-J} \circ J) \circ f] \circ g = (I_{-J} \circ J) \circ (f \circ g)$$

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{I_{-g}} & Y \\ & \xleftarrow{g} & \\ & \xleftarrow{J} & X \end{array}$$

δείτε.

Η σύνθεση $g \circ f$ δύο αμφιέσεων f και g είναι αμφιέση της οποίας η

$$\square. I_{-J} \circ g = (J \circ f)$$

αντιστροφή είναι η $I_{-J} \circ g \circ f$.

$$\square. I_{-J} = I^Y \circ I_{-J} = (g \circ f) \circ I_{-J} = g \circ (f \circ I_{-J}) = g \circ I^X = I^X \circ g$$

δείτε. Θα δείξουμε ότι $I_{-J} \circ g = g \circ I^X$.

$$f(x) = f(g(y)) = (f \circ g)(y) = I^Y(y) = y.$$

Έτσι από την f στο y αφού

είναι έσοδος, για κάθε $y \in Y$, το στοιχείο $x = g(y)$ του X

$$f(x_2) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) = I^X(x_1) = I^X(x_2) = x_1 = x_2.$$

δείτε. (α) η f είναι έσοδος:

είναι αμφιέση και μάλλον η αντιστροφή της είναι η g .

$$I^X = I^Y \quad \text{και} \quad f \circ g = I^X$$

X τέτοια ώστε

ΠΡΩΤΗ 1.6.1. Θεωρούμε μια απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$. Αν υπάρχει απεικόνιση

κάνει σήματα με το θεώρημα ότι η f^{-1} είναι αμφίσημη, της οποίας η αντίστροφη η f ή f^{-1} , δηλαδή

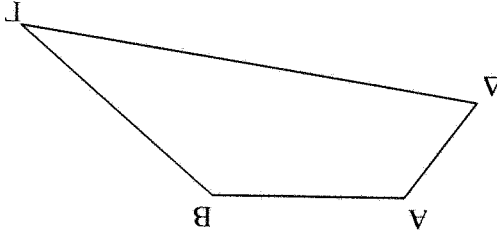
$$\square \quad f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1}$$

Όπως είδατε σε προηγούμενη παράγραφο, αν υπάρχει μια αμφίσημη μετάσυνδυασμένων συνόλων, τότε τα σύνολα αυτά έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Η απτήρηση αυτή οδηγεί στον ορισμό της ισοαριθμίας για οποιαδήποτε σύνολα. Θα λέμε ότι ένα σύνολο X είναι **ισοαριθμίο** προς ένα σύνολο Y αν υπάρχει μια τέση $f: X \rightarrow Y$. Ιδιαιτερα κάθε σύνολο ισοαριθμίο προς το σύνολο των φυσικών ημών \mathbb{N} ονομάζεται **αριθμητικό** σύνολο.

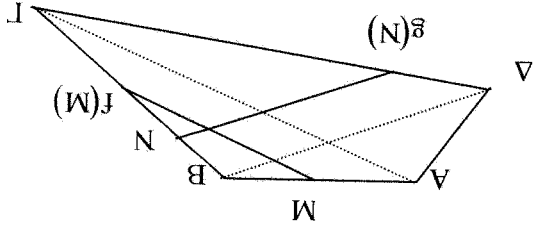
Από τα προηγούμενα δύο κορίσματα προκύπτει ότι:

- Αν το X είναι ισοαριθμίο προς το Z
- Αν το X είναι ισοαριθμίο προς το Y και το Y είναι ισοαριθμίο προς το Z , τότε το X είναι ισοαριθμίο προς το Z , τότε και το Y είναι ισοαριθμίο προς το X .

Πρόβλημα 1.3. Να δείξετε ότι υπάρχει μια αμφίσημη από το σύνολο των σημείων του γράμμου τμημάτων AB σ' εκείνο των σημείων του $\Gamma\Delta$ στο παρακάτω τετράπλευρο:



Ανση. Άγουμε τις διαγωνίους $A\Gamma$, $B\Delta$ και θεωρούμε τις απεικονίσεις f, g όπως τις ατε σε προηγούμενο παράδειγμα:



είδατε, απφοτέρως οι f και g είναι αμφίσημες, άρα αμφίσημη θα είναι και η σύνθεση τους $g \circ f$. \square

στην παράγραφο αυτή, θα δώσουμε μια συνταγή δημιουργίας αντγράφων του \mathbb{N} . Για τον αυτό μας χρειάζονται τα εξής υλικά: ένα σύνολο Φ , ένα στοιχείο του $\mathbb{0} \in \Phi$ και ένας $\delta : \Phi \rightarrow \Phi$ που τη λέμε **συνάρτηση διαδοχής** έτσι ώστε:

$$1 \neq \delta(\mathbb{0})$$

2) $\forall A \subseteq \Phi$ είναι τέτοιο ώστε

$$- \mathbb{0} \in A$$

$$- \forall a \in A \Rightarrow \delta(a) \in A$$

τότε $A = \Phi$.

Θα δείξουμε ότι τα παραπάνω αξιώματα αρκούν για να κάνουμε το Φ ένα αντγράφο \mathbb{N} .

Εφαρμόζοντας το p_2 στο σύνολο $A = \{\mathbb{0}, \delta(\mathbb{0}), \delta(\delta(\mathbb{0})), \dots\}$ βρίσκουμε ότι $A = \Phi$.

Επιπλέον τα στοιχεία $\delta(\mathbb{0}), \delta(\delta(\mathbb{0})), \dots$ να τα παριστάνουμε με τα σύμβολα $1, 2, \dots$

στοιχα. Έτσι

$$\Phi = \{\mathbb{0}, 1, 2, \dots\}.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.7.1 (Αρχή της επαγωγής) Θεωρούμε μία πρόταση $P(n)$ που εξαρτάται από το στοιχείο $n \in \Phi$. Αν η $P(\mathbb{0})$ είναι αληθής και με την υπόθεση ότι η $P(k)$ είναι αληθής τότε η $P(n)$ είναι αληθής, τότε η $P(n)$ είναι αληθής για όλα τα $n \in \Phi$.

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο αληθειας της P :

$$A = \{n \in \Phi / P(n) \text{ αληθής}\}$$

την υπόθεση, $\mathbb{0} \in A$ ενώ $k \in A$ συνεπάγεται $\delta(k) \in A$.

Επώς, από το αξίωμα p_2 συνάγουμε $A = \Phi$, δηλαδή η $P(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \Phi$.

Το αξίωμα p_2 χρησιμοποιείται ακόμη και για επαγωγικές κατασκευές.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.7.2. Αγ είναι $K(n)$ μια κατασκευή που εξαρτάται από το στοιχείο $n \in \Phi$. η $K(\mathbb{0})$ μπορεί να πραγματοποιηθεί, ενώ με την υπόθεση ότι η $K(k)$ πραγματοποιείται, τότε να πραγματοποιηθούν και την $K(\delta(k))$, τότε η $K(n)$ πραγματοποιείται για όλα τα $n \in \Phi$.

Απόδειξη. Δεν έχουμε παρά να εφαρμόσουμε το p_2 στο σύνολο $A = \{n \in \Phi / K(n) \text{ πραγματοποιείται}\}$. □

$$m + 0 = m, \quad m + \delta(n) = \delta(m + n).$$

Για οποιαδήποτε στοιχεία $m, n \in \Phi$ ορίζουμε το άθροισμα τους $m + n$ με την δλουθη επαγωγική κατασκευή:

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.7.3. Για οποιαδήποτε $m, n, k \in \Phi$ ισχύουν τα ακόλουθα:

i) $(m + n) + k = m + (n + k), m + n = n + m$

ii) $m + n = 0$ συνεπάγεται $m = 0$ και $n = 0$

iii) $m + k = n + k$ συνεπάγεται $m = n$ (*νόμος της διαφοράς*).

Απόδειξη. ii) Αγ υποθέσουμε ότι ένα τουλάχιστον από τα m, n είναι διάφορο του 0, $n \neq 0$. Τότε $n = \delta(k)$ με $k \in \Phi$. Έτσι η υπόθεση $m + n = 0$ γίνεται $m + \delta(k) = 0$ ή $m + k = 0$, πράγμα που δεν μπορεί να συμβαίνει λόγω του αξιωματος p₁.

iii) Η iii) είναι αληθής για $k = 0$:

$$m + 0 = n + 0 \text{ συνεπάγεται } m = n$$

υποθέσουμε ότι η iii) αληθεύει για $k \in \Phi$, δηλαδή ότι $m + k = n + k$ συνεπάγεται

$$m + k = n + k.$$

α δείξουμε την iii) και για το $\delta(k)$. Πράγματι, από την $m + \delta(k) = n + \delta(k)$ παίρνουμε

$$m + k = \delta(n + k) \text{ και καθώς από την υπόθεση η } \delta \text{ είναι ένεση, συνεπώς}$$

$$m + k = n + k, \text{ απ' όπου } m = n \text{ όπως το θέλαμε.}$$

Επειδή η iii) είναι αληθής για κάθε $k \in \Phi$.

Την απόδειξη της i) την αφήνουμε στον αναγνώστη ως άσκηση. □

Για οποιαδήποτε στοιχεία $m, n \in \Phi$, γράφουμε $m \leq n$, αν υπάρχει $k \in \Phi$ ώστε

$$m + k = n. \text{ Το } k \text{ αυτό είναι μοναδικό (γιατί αν } k' \text{ είναι τέτοιο ώστε } m + k' = n, \text{ τότε}$$

$$m + k = m + k', \text{ ομοιάζεται } \textit{διαφορά} \text{ του } n \text{ από το } m \text{ και συμβολίζεται}$$

$$n - m.$$

Αν $m \leq n$ και $m \neq n$ τότε γράφουμε $m < n$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.7.4. i) Για οποιαδήποτε $m, n, k \in \Phi$ ισχύουν:

$$\leq m$$

$$\leq n \text{ και } n \leq k \Rightarrow m \leq k$$

$$> n \text{ και } n > k \Rightarrow m < k$$

$$\leq n \text{ και } n \leq m \Rightarrow m = n.$$

ii) (*Άρνηση της τριχοτομίας*) Για οποιαδήποτε $m, n \in \Phi$ ακριβώς μία από τις παρακάτω

έσεται ισχύει:

$$m < n, \quad m = n, \quad m > n$$

θεώρημα. Θα αποδείξουμε μόνο το ii) Για κάθε $m \in \Phi$, θεωρούμε την ακολουθία

$P_m(k) : \text{μία τουλάχιστον από τις παρακάτω σχέσεις αληθεύει}$

$$m < k, m = k, m > k.$$

(0) είναι αληθής, αφού είτε $m = 0$ είτε $m > 0$.

θέτουμε ότι η $P_m(k)$ είναι αληθής και προχωρούμε να αποδείξουμε ότι η $P_m(\delta(k))$ αληθεύει, δηλαδή ότι ικανοποιείται μία τουλάχιστον από τις σχέσεις:

$$m > \delta(k), \quad m = \delta(k), \quad m < \delta(k)$$

τι, αν ισχύει $m > k$, τότε καθώς $k > \delta(k)$ θα έχουμε και $m > \delta(k)$.

k , τότε καθώς $k > \delta(k)$ θα έχουμε και $m > \delta(k)$.

αν $m < k$ τότε $k + r = m$, για κάποιο $r \in \Phi - \{0\}$. Είναι $r = \delta(p)$, $p \in \Phi$, οπότε

$$m = m, \text{ ή } \delta(k) + p = m. \text{ Αν } p = 0, \text{ τότε } m = \delta(k). \text{ Αν } p \neq 0, \text{ τότε } \delta(k) > m.$$

δείξαμε λοιπόν ότι για οποιαδήποτε $m, n \in \Phi$ μία τουλάχιστον από τις παρακάτω αληθεύει:

$$m > n, m = n, m < n$$

οπότε ότι το ποσό για αυτόν αριθμό αληθεύει. Παράγεται, αν συμβαίνει

$$m > n \text{ και } m = n$$

$$m + k = n \text{ και } m = n, \text{ με } k \neq 0$$

$$m + k = m \text{ με } k \neq 0$$

$$m + k = m + 0, k \neq 0$$

νόμος διαφοράς δίνει $k = 0$, άτοπο.

ήτοι

$$m > n \text{ και } n > m$$

$$m + k = n \text{ και } n + p = m \text{ με } k, p \in \Phi - \{0\}$$

$$m = n + p = (m + k) + p = m + (k + p) \quad (k + p \in \Phi - \{0\}),$$

$$m + 0 = m + (k + p) \quad (k + p \in \Phi - \{0\})$$

$$k + p = 0 \quad k, p \in \Phi - \{0\}$$

$$k = 0 = p,$$

οποιαδήποτε $m, n \in \Phi$ ορίζουμε το γινόμενο $m \cdot n$ (ή απλά mn) με τον ακόλουθο

κό τρόπο.

Θα έχουμε $n_0 \in A$ ενώ

$$A = \{n/n \in \Phi, P(n) \text{ αληθής}\}.$$

Απόδειξη. Θέτουμε

τε η $P(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \Phi(n_0)$.
 $P(k)$ αληθής ($k > n_0$) συνεπάγεται $P(k+1)$ αληθής.

(n_0) είναι αληθής, ενώ
 ΠΡΟΤΑΣΗ 1.7.7. Θεωρούμε μία πρόταση $P(n)$ που εξαρτάται από το $n \in \Phi$. Αν

$$\Phi(n_0) = \{n/n \in \Phi \text{ και } n \geq n_0\}.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της καλής διάταξης για να δώσουμε δυο χρήσιμες
 ρυθές της μαθηματικής μεθόδου. Για $n_0 \in \Phi$ θέτουμε

Από το E είναι από την υπόθεση διάφορο του κενού, μπορούμε να επιλέξουμε ένα
 στοιχείο k σ' αυτό. Το $k+1 \in \Phi = A$ και άρα $k+1 \leq k$, άτοπο. □

Προφανώς $0 \in A$. Αγ είναι άρα $n \in A$, δηλαδή $n \leq k$, για κάθε $k \in E$. Το n δεν
 ηκει στο E γιατί διαφορετικά θα ήταν ελάχιστο στοιχείο του. Έτσι, $n < k$ για κάθε
 $k \in E$ και άρα $\delta(n) = n+1 \leq k$ για κάθε $k \in E$, δηλαδή $\delta(n) \in A$. Η αρχή της επαγωγής
 μας δίνει ότι $A = \{n \in \Phi/n \leq k \text{ για κάθε } k \in E\}$.

Απόδειξη. Αγ υποθέσουμε αντίθετα ότι το E δεν έχει ελάχιστο στοιχείο, κι αγ
 ορίσουμε το σύνολο

$$n_0 \leq k \text{ για κάθε } k \in E.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.7.6. (Αρχή καλής διάταξης) Κάθε μη-κενό υποσύνολο E του Φ έχει ένα
 ελάχιστο στοιχείο, δηλαδή υπάρχει $n_0 \in E$ τέτοιο ώστε

επιμεληνη πρόταση είναι πολύ χρήσιμη:

Απόδειξη. Ασκησι. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.7.5 Για οποιαδήποτε $m, n, k \in \Phi$ ισχύουν τα ακόλουθα:
 i) $(mn)k = m(nk)$, $mn = nm$, $m1 = m$
 ii) $m(n+k) = mn + mk$
 iii) $mn = 0$ συνεπάγεται $m = 0$ ή $n = 0$
 iv) $mk = nk$, $k \neq 0$ συνεπάγεται $m = n$

$$m \cdot 0 = 0, \quad m \cdot \delta(n) = m \cdot n + m.$$

$$k \in A \text{ (} k > n_0 \text{) συνεπάγεται } k + 1 \in A. \quad (ε_1)$$

δείχνουμε ότι $A = \Phi(n_0)$. Αγ υποθέσουμε αντίθετα ότι $A \neq \Phi(n_0)$ κι ως είναι k το στοιχείο του συνόλου $B = \Phi(n_0) - A$. Αφού $k \in \Phi(n_0)$ θα είναι $n_0 \leq k$ και n_0 δεν ανήκει στο B , θα είναι $n_0 > k$.

$k - 1$ δεν ανήκει στο B , πράγμα που σημαίνει ότι $k - 1 \in A$. Πρώτη αυτή η $(ε_1)$ δίνει $(k - 1) + 1 = k \in A$.

Υπό $A = \Phi(n_0)$, όπως το επιθυμούμε. □

πρόβλημα 1.7. (Λήμμα Bernoulli) Για κάθε $n \geq 2$ ισχύει

$$(1 + k)^n > 1 + kn, \quad k > 0.$$

πόταση είναι αληθής για $n = 2$:

$$(k + 1)^2 = 1 + 2k + k^2 > 1 + 2k$$

θέτουμε αθιμένο τον ισχυρισμό μας για τον n και προχωρούμε να τον

δείξουμε για τον $n + 1$:

$$(1 + k)^{n+1} = (1 + k)^n (1 + k) > (1 + nk)(1 + k) = 1 + (n + 1)k + nk^2 > 1 + (n + 1)k$$

επειδή από την προηγούμενη πρόταση, ο ισχυρισμός μας είναι αληθής για όλα τα

□

ΟΤΑΣΗ 1.7.8. Αγ είναι $P(n)$ μια πρόταση που εξαρτάται από το $n \in \Phi$ κι ως

υπάρχει ότι

n_0 είναι αληθής ενώ

n αληθής για όλα τα m με $n_0 \leq m < k$ συνεπάγεται $P(k)$ αληθής.

$P(n)$ είναι αληθής για όλα τα $n \in \Phi(n_0)$.

πόδειξη. Ανάλυση της προηγούμενης. Θέτουμε $A = \{n/n \in \Phi \text{ και } P(n) \text{ αληθής}\}$.

υπάρχει $n_0 \in A$, ενώ

$m \in A$ για όλα τα m με $n_0 \leq m < k$ συνεπάγεται $k \in A$.

(ε₂)

δείχνουμε ότι $A = \Phi(n_0)$. Αγ υποθέσουμε αντίθετα, ότι $A \neq \Phi(n_0)$ κι ως είναι k το

στοιχείο του συνόλου $B = \Phi(n_0) - A$. Και πάλι, $n_0 > k$.

θε m με $n_0 \leq m < k$ θα συμβαίνει $k \notin B$ και άρα $k \in A$, οπότε από την $(ε_2)$ υπάρχει $m \in A$, άτοπο. □

πρόβλημα 1.8. Η ακολουθία (f_n) του *Fibonacci*, ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

$$f_0 = 1, \quad f_1 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

ποσώντας την προηγούμενη πρόταση, θα δείχνουμε ότι

$$f_n > 2^n, \quad n \geq 0.$$

αμφότερη της οποίας η αντίστροφη είναι η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ που ορίζεται από

$$f(x) = \frac{1 - |x|}{x}$$

Άσκηση 1.7. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} f^{-1}(B_1 \cup B_2) &= f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \\ f^{-1}(B_1 \cap B_2) &= f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \\ f^{-1}(C^Y B) &= C^{X \cup Y} (f^{-1}(B)) \end{aligned}$$

Άσκηση 1.6. Για $B_1, B_2 \subseteq Y$ έχουμε

$$\begin{aligned} f(A_1 \cup A_2) &= f(A_1) \cup f(A_2) \\ f(A_1 \cap A_2) &\subseteq f(A_1) \cap f(A_2) \end{aligned}$$

Άσκηση 1.5. Για $A_1, A_2 \subseteq X$ έχουμε

$$\begin{aligned} X \times (Y_1 \cup \dots \cup Y_n) &= (X \times Y_1) \cup \dots \cup (X \times Y_n) \\ (X \times Y_1) \cup \dots \cup (X \times Y_n) &= X \times (Y_1 \cup \dots \cup Y_n) \end{aligned}$$

Άσκηση 1.4. Να δείξετε ότι

ποιαδήποτε σύνολα X, Y_1, \dots, Y_n .

ήστε

Πρόβλημα 1.6. Αν από τις προϋποθέσεις που θέσαμε στην αρχή της παραγράφου θέσουμε την «δέσμη», να ελέγξετε, ποιές από τις προηγούμενες κατασκευές και

ήστε ισχύουν. □

η προηγούμενη αξιωματική διαδικασία στον μαθηματικό G. Peano. □
 υστε στο σύνολο Φ . Με άλλους λόγους, το Φ δεν είναι παρά ένα αντίγραφο του \mathbb{N} .
 ούπε να κένουμε στο σύνολο \mathbb{N} των φυσικών αριθμών, την αντίστοιχη ισοτιμία να
 ιαστώσουμε απ' όλη την προηγούμενη συζήτηση ότι οποιαδήποτε κατασκευή

η ανισότητα ισχύει για κάθε $n \geq 0$. □

$$f^n = f^{n-1} + f^{n-2} > 2^{n-1} + 2^{n-2} = 2^{n-2} \cdot 3 > 2^{n-2} \cdot 4 = 2^n$$

είζουμε για τον n :
 'ποθέτουμε αλθινό τον ισχυρισμό μας για όλα τα $k > n$ και προχωρούμε να τον
 Προφανώς, για $n = 0, 1$ η ανισότητα ισχύει.

$$X \ni x \text{ καθ' } \mu \lambda, \quad (x)\phi - 1 = (x)\underline{\phi}$$

οπου μ αντιστοιχεί στο $X : \phi \leftarrow [1, 0]$ ολνδωσπ 5:

κρηνη 1.10. Το *συντηρητικό* ϕ ολνδωσπ $X : \phi \leftarrow [0, 1]$ ολνδωσπ 5:

$$\square \cdot (\omega \cup \phi) \cup (\psi \cap \phi) = (\omega \cup \psi) \cap \phi$$
$$(\omega \cup \phi) \cap (\psi \cup \phi) = (\omega \cap \psi) \cup \phi$$

120 ληη

$$\phi = \phi \cup \phi$$

$$\phi = \phi \cap \phi$$

$$\phi \cup \psi = \psi \cup \phi$$

$$\phi \cap \psi = \psi \cap \phi$$

$$\omega \cup (\psi \cup \phi) = (\omega \cup \psi) \cup \phi$$

$$\omega \cap (\psi \cap \phi) = (\omega \cap \psi) \cap \phi$$

110 31355

$$X \ni x \quad ((x)\psi \cap (x)\phi) \cup \mu \lambda = (x)(\psi \cup \phi)$$

οπου μ αντιστοιχεί στο $X : \psi \cup \phi \leftarrow [1, 0]$ ολνδωσπ 5:

$$X \ni x \quad ((x)\psi \cup (x)\phi) \cap \mu \lambda = (x)(\psi \cap \phi)$$

οπου μ αντιστοιχεί στο $X : \psi \cap \phi \leftarrow [1, 0]$ ολνδωσπ 5:

κρηνη 1.9. Η *επιωση* ολνδωσπ $\phi, \psi \leftarrow [0, 1]$ ολνδωσπ 5:

$$\square \cdot \psi = \phi \Leftarrow \phi \supseteq \psi \text{ και } \psi \supseteq \phi$$

$$\omega \supseteq \phi \Leftarrow \omega \supseteq \psi \text{ και } \psi \supseteq \phi$$

$$\phi \supseteq \phi$$

110 31355

η ψ ολνδωσπ 5:

η ϕ ολνδωσπ 5: το ποσοστό η x ανήκει στο ϕ ολνδωσπ 5: το ποσοστό η x ανήκει στο ψ .

$$\gamma \text{ καθ' } \mu \lambda \text{ και } x \in X, \quad (x)\psi \leq (x)\phi$$

$\leftarrow [0, 1]$ ολνδωσπ 5:

η ϕ ολνδωσπ 5: το ποσοστό η x ανήκει στο ϕ ολνδωσπ 5: το ποσοστό η x ανήκει στο ψ .

το ποσοστό η x ανήκει στο ϕ .

$$(x)\phi = \frac{z}{1} \text{ το } x \text{ ανήκει στο } \phi \text{ κατά } 50\%. \text{ Αν } (x)\phi = 1, \text{ το } x \text{ ανήκει στο } \phi \text{ 100\%, ενώ}$$

ο αριθμός $(x)\phi$ μας δείχνει το ποσοστό η x ανήκει στο ϕ .

ζουμε *ασφές* (fuzzy) υποσύνολο του X κάθε αντικείμενο $x \in X$ ανήκει στο ϕ ολνδωσπ 5: το ποσοστό η x ανήκει στο ϕ .

$$[0, 1] = \{x/x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 1\}$$

κρηνη 1.8. Δίνονται ένα σύνολο X και το μοναδιαίο διάστημα

$$\square \cdot \mathcal{G}(x) = \frac{|x| + 1}{x}$$