Σύνολα-Απεικονίσεις

1. ΣΥΝΟΛΑ

Κάθε συλλογή από αντικείμενα ονομάζεται ***σύνολο***· τα αντικείμενα αυτά είναι τα ***στοιχεία*** του συνόλου. Ένας τρόπος για να παραστήσουμε ένα σύνολο X είναι να γράψουμε όλα τα στοιχεία του, π.χ.

$$X = \{\alpha, \beta, 3, 7, *, ?\}.$$

Ένας άλλος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε μία χαρακτηριστική ιδιότητα των στοιχείων του: λέμε ότι το σύνολο X αποτελείται από όλα εκείνα τα αντικείμενα που έχουν την ιδιότητα P και γράφουμε

$$X = \{x / x \ \text{έχει την ιδιότητα} \ P\}.$$

Χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς

$$x \in X \ \text{και} \ x \notin X$$

για να δηλώσουμε ότι το x είναι ή δεν είναι στοιχείο του συνόλου X.

Λέμε ότι ένα σύνολο X είναι ***υποσύνολο*** ενός συνόλου Y και γράφουμε $X \subseteq Y$, α κάθε στοιχείο του X είναι και στοιχείο του Y.

Δύο σύνολα X και Y λέγονται ***ίσα μεταξύ τους*** (συμβολισμός $X = Y$) αν

$$X \subseteq Y \ \text{και} \ Y \subseteq X$$

δηλαδή αν έχουν τα ίδια στοιχεία.

Αν λοιπόν τα X και Y δεν είναι ίσα μεταξύ τους, $X \neq Y$, τούτο σημαίνει ότι υπάρχει έ στοιχείο του X που δεν ανήκει στο Y ή ότι υπάρχει ένα στοιχείο του Y που δεν είναι στοιχείο του X.

Στην περίπτωση που $X \subseteq Y$ και $X \neq Y$, λέμε ότι το X είναι ***γνήσιο υποσύνολο*** το και το συμβολίζουμε $X \subset Y$.

Το ***κενό*** σύνολο $\varnothing$ (δηλαδή το σύνολο που στερείται στοιχείων) θεωρείται υποσύνολο κάθε συνόλου.

Με $\mathcal{P}(X)$ παριστάνουμε το σύνολο όλων των υποσυνόλων του X.

Στο εξής, με $\mathbb{N}$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των ***φυσικών αριθμών***, δηλαδή

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}.$$

με $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ***ακεραίων αριθμών***, δηλαδή

$$\mathbb{Z} = \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}.$$

με $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ***ρητών αριθμών***, δηλαδή

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} / m, n \in \mathbb{Z} \quad \text{και} \quad n \neq 0\right\},$$

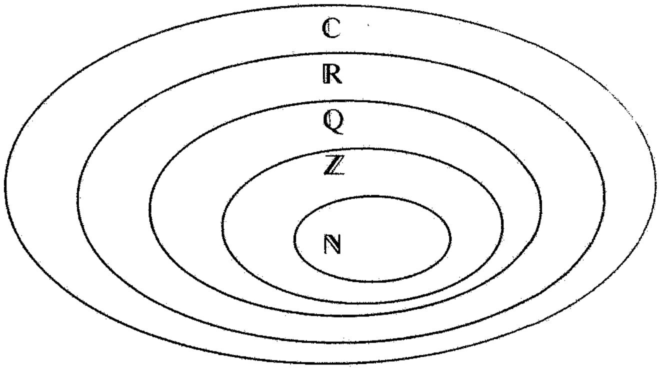
με $\mathbb{R}$ το σύνολο των ***πραγματικών αριθμών*** και με $\mathbb{C}$ το σύνολο των ***μιγαδικών αριθμώ***

Είναι $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ αφού $-2 \in \mathbb{Z}$ και $-2 \notin \mathbb{N}$

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ αφού $\frac{5}{2} \in \mathbb{Q}$ και $\frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ αφού $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$ και $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

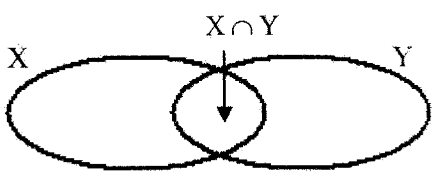
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ αφού $-i \in \mathbb{C}$ και $-i \notin \mathbb{R}$.



2. ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΑΝΩ ΣΕ ΣΥΝΟΛΑ

Ονομάζουμε ***τομή*** δύο συνόλων X και Y και τη συμβολίζουμε $X \cap Y$, το σύνολο όλων των στοιχείων που ανήκουν ταυτόχρονα στα X και Y, δηλαδή

$$X \cap Y = \{x / x \in X \quad \text{και} \quad x \in Y\}$$



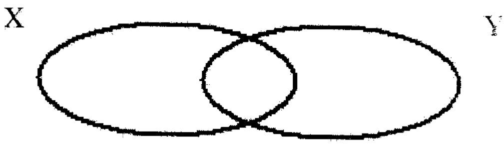
..., τα σύνολα Χ και Υ λέγονται ξένα μεταξύ τους.

Η τομή έχει τις παρακάτω ιδιότητες

$$X \cap X = X$$
$$X \cap Y = Y \cap X$$
$$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z .$$

Ονομάζουμε ***ένωση*** των Χ και Υ και γράφουμε $X \cup Y$, το σύνολο όλων των στοιχείων που ανήκουν είτε στο Χ, είτε στο Υ, δηλαδή

$$X \cup Y = \{x/x \in X \quad \text{είτε} \quad x \in Y\}$$



(Το $X \cup Y$ είναι όλο το σκιασμένο μέρος).

Η ένωση έχει τις επόμενες ιδιότητες

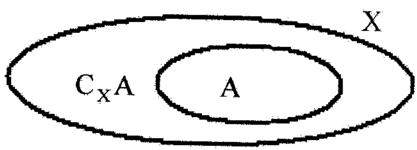
$$X \cup X = X$$
$$X \cup Y = Y \cup X$$
$$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z .$$

Η ένωση και η τομή συνδέονται μεταξύ τους με τις σχέσεις

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$
$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$$

Αν Χ είναι ένα σύνολο και Α ένα υποσύνολο του τότε το ***συμπλήρωμα*** του Α ω το Χ (συμβολισμός $C_X A$) είναι το σύνολο όλων των στοιχείων του Χ που δεν είναι στοιχεία του Α, δηλαδή

$$C_X A = \{x/x \in X \quad \text{και} \quad x \notin A\}.$$



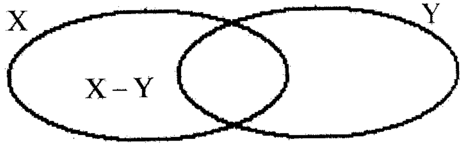
Το σύμβολο « C_X » έχει τις επόμενες ιδιότητες

$$C_X(C_X A) = A \quad , \quad C_X(X) = \varnothing \quad , \quad C_X(\varnothing) = X$$
$$A \cap (C_X A) = \varnothing \quad , \quad A \cup (C_X A) = X$$
$$C_X(A \cap B) = (C_X A) \cup (C_X B)$$
$$C_X(A \cup B) = (C_X A) \cap (C_X B).$$

Άσκηση 1.1. Να αποδειχθούν οι παραπάνω ιδιοτητες.□

Γενικότερα μπορούμε να ορίσουμε τη ***διαφορά*** δύο συνόλων X και Y ως εξής:

$$X - Y = \{x / x \in X \quad \text{και} \quad x \notin Y\}.$$

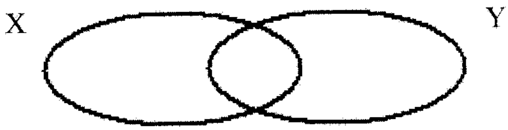


Με άλλα λόγια το $X - Y$ έχει ως στοιχεία όλα τα στοιχεία του X που δεν είναι στοιχεία του Y. Έτσι για παράδειγμα

$$\mathbb{C} - \mathbb{R} = \{z / z \in \mathbb{C} \text{ και } z \notin \mathbb{R}\} = \{z / z \in \mathbb{C} \text{ και } \operatorname{Im}(z) \neq 0\}.$$

Τέλος η ***συμμετρική διαφορά*** δύο συνόλων X και Y ορίζεται από

$$X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X).$$



Εισάγουμε τώρα μια άλλη πράξη η οποία θα μας επιτρέψει να κατασκευάσουμε νέ[α] μαθηματικά αντικείμενα. Η πράξη αυτή συνίσταται, στην κατασκευή με τη βοήθεια δύ[ο] μαθηματικών αντικειμένων x και y, ενός τρίτου αντικειμένου που το συμβολίζουμε

$$(x, y)$$

και το ονομάζουμε ***διατεταγμένο ζεύγος***.

Ο σχηματισμός διατεταγμένων ζευγών υπόκειται σε ένα μόνο αξίωμα: για να έχουμε

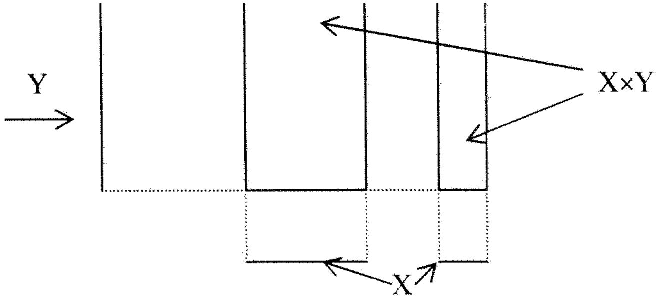
$$(x, y) = (x', y')$$

πρέπει και αρκεί

$$x = x' \text{ και } y = y'.$$

Το ***καρτεσιανό γινόμενο*** $X \times Y$ δύο συνόλων X και Y είναι το σύνολο που σχηματίζεται από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη (x, y), όταν το x διατρέχει το σύνολο X [κ]αι το y διατρέχει το σύνολο Y, δηλαδή

$$X \times Y = \{(x, y) / x \in X \quad \text{και} \quad y \in Y\}.$$



Το καρτεσιανό γινόμενο συνόλων έχει τις επόμενες ιδιότητες:

$$X \times (Y \cap Z) = (X \times Y) \cap (X \times Z)$$
$$X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z).$$

Γενίκευση: αν έχουμε n αντικείμενα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ μπορούμε τότε να κατασκευάσ ένα άλλο αντικείμενο που το συμβολίζουμε

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

και το ονομάζουμε ***διατεταγμένη n-άδα*** με τη μόνη αξίωση

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

τότε και μόνο όταν

$$x_1 = y_1 \quad , \quad x_2 = y_2 \quad , \quad \ldots \quad , \quad x_n = y_n .$$

Ονομάζουμε ***καρτεσιανό γινόμενο***

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$$

των συνόλων $X_1, X_2, \ldots, X_n$ το σύνολο όλων των διατεταγμένων n-άδων $(x_1, x_2, \ldots$ που μπορούμε να κατασκευάσουμε όταν το x_1 διατρέχει το σύνολο X_1, το x_2 διατ το σύνολο X_2, κ.ο.κ. το x_n διατρέχει το σύνολο X_n, δηλαδή

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) / x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n\}.$$

Στα Μαθηματικά μια έννοια συχνά χρήσιμη είναι εκείνη της οικογένειας που ορ ως εξής: ας είναι I ένα σύνολο. Αν για κάθε $i \in I$ επιλέξουμε ένα σύνολο X_i, σχηματίζουμε μια ***οικογένεια συνόλων με δείκτες*** από το I· τη συμβολίζουμε

$$(X_i)_{i \in I} .$$

Οι πράξεις της ένωσης και της τομής δύο συνόλων όπως τις ορίσαμε στην αρχή επεκτείνονται χωρίς κόπο σε μια οποιαδήποτε οικογένεια συνόλων $(X_i)_{i \in I}$. Έτσι:

- η ***ένωση*** των X_i που σημειώνεται $\bigcup_{i \in I} X_i$, είναι το σύνολο των στοιχείων π ανήκουν τουλάχιστον σ' ένα X_i

$$\bigcup_{i \in I} X_i = \{x \,/\, \text{υπάρχει } i \in I \text{ ώστε } x \in X_i\}$$

- η ***τομή*** των X_i που σημειώνεται $\bigcap_{i\in I} X_i$, είναι το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν ταυτόχρονα σ' όλα τα X_i

$$\bigcap_{i\in I} X_i = \{x / x \in X_i \text{ για κάθε } \iota \in I\}.$$

Ένα αξιοσημείωτο είδος οικογένειας συνόλων είναι ό,τι ονομάζουμε ***διαμελισμό*** ενός συνόλου.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2.1. Ας είναι X ένα σύνολο. Μια οικογένεια $(X_i)_{i\in I}$ από μη-κενά υποσύνολα του X λέμε ότι ***διαμελίζει*** το X αν:

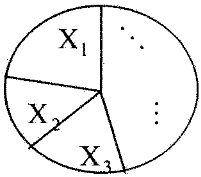
1) τα X_i καλύπτουν ολόκληρο το X, δηλαδή

$$X = \bigcup_{i\in I} X_i$$

και

2) δύο διαφορετικά σύνολα της οικογένειας δε συναντώνται, δηλαδή

$$i \neq j \Rightarrow X_i \cap X_j = \varnothing .$$



Για παράδειγμα ας πάρουμε $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Τότε τα σύνολα

$$\{1,2,3\},\ \{4,5,6\},\ \{7,8\},\ \{9\}$$

διαμελίζουν το X, ενώ τα

$$\{1,2,3\},\ \{3,4,5\},\ \{7,8,9\}$$

δεν το διαμελίζουν αφού τα δύο πρώτα συναντώνται, ενώ η ένωση τους δεν καλύπτει ολόκληρο το X.

Το πλήθος των διαμελισμών του συνόλου $\{1,2,\ldots,n\}$ ονομάζεται ***n-οστός αριθμός του Bell*** και συμβολίζεται S_n.

Για παράδειγμα, $S_2 = 2$ αφού υπάρχουν δύο μόνο διαμελισμοί του $\{1,2\}$.
Οι διαμελισμοί του συνόλου $\{1,2,3\}$ είναι οι ακόλουθοι:

$$\{1,2,3\}$$
$$\{1\},\{2,3\}$$
$$\{2\},\{1,3\}$$
$$\{3\},\{1,2\}$$
$$\{1\},\{2\},\{3\}$$

Σύνολα-Απεικονίσεις

1. ΣΥΝΟΛΑ

ιάθε συλλογή από αντικείμενα ονομάζεται ***σύνολο***· τα αντικείμενα αυτά είναι τα ***;εία*** του συνόλου. Ένας τρόπος για να παραστήσουμε ένα σύνολο X είναι να ουμε όλα τα στοιχεία του, π.χ.

$$X = \{\alpha, \beta, 3, 7, *, ?\}.$$

ίνας άλλος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε μία χαρακτηριστική ιδιότητα των ;είων του: λέμε ότι το σύνολο X αποτελείται από όλα εκείνα τα αντικείμενα που ' την ιδιότητα P και γράφουμε

$$X = \{x/x \ \text{έχει την ιδιότητα} \ P\}.$$

ίρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς

$$x \in X \ \text{και} \ x \notin X$$

ι δηλώσουμε ότι το x είναι ή δεν είναι στοιχείο του συνόλου X.

ιέμε ότι ένα σύνολο X είναι ***υποσύνολο*** ενός συνόλου Y και γράφουμε $X \subseteq Y$, αν στοιχείο του X είναι και στοιχείο του Y.

ιύο σύνολα X και Y λέγονται ***ίσα μεταξύ τους*** (συμβολισμός $X = Y$) αν

$$X \subseteq Y \ \text{και} \ Y \subseteq X$$

ιή αν έχουν τα ίδια στοιχεία.

ιπόν τα X και Y δεν είναι ίσα μεταξύ τους, $X \neq Y$, τούτο σημαίνει ότι υπάρχει ένα είο του X που δεν ανήκει στο Y ή ότι υπάρχει ένα στοιχείο του Y που δεν είναι είο του X.

την περίπτωση που $X \subseteq Y$ και $X \neq Y$, λέμε ότι το X είναι ***γνήσιο υποσύνολο*** του Y ι συμβολίζουμε $X \subset Y$.

ο ***κενό*** σύνολο $\varnothing$ (δηλαδή το σύνολο που στερείται στοιχείων) θεωρείται ιύνολο κάθε συνόλου.

Ιε $\mathcal{P}(X)$ παριστάνουμε το σύνολο όλων των υποσυνόλων του X.

ξής, με $\mathbb{N}$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των ***φυσικών αριθμών***, δηλαδή

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}.$$

σύνολο των ***ακεραίων αριθμών***, δηλαδή

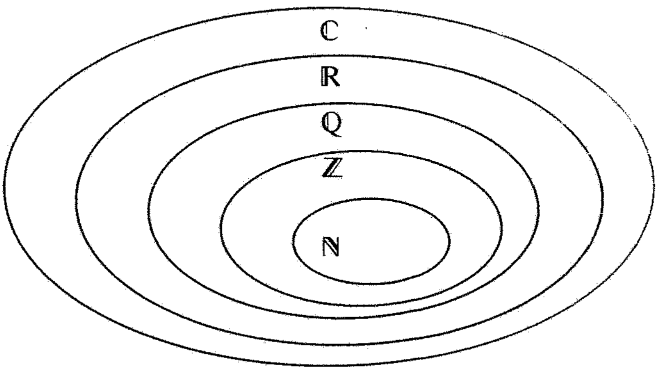
$$\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}.$$

σύνολο των ***ρητών αριθμών***, δηλαδή

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} / m,n \in \mathbb{Z} \ \text{ και } \ n \neq 0\right\},$$

σύνολο των ***πραγματικών αριθμών*** και με $\mathbb{C}$ το σύνολο των ***μιγαδικών αριθμών***.

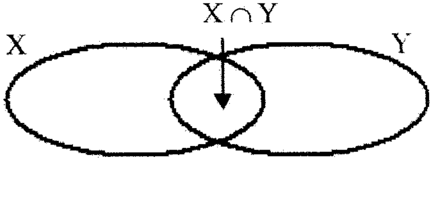
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ αφού	$-2 \in \mathbb{Z}$	και	$-2 \notin \mathbb{N}$
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ αφού	$\frac{5}{2} \in \mathbb{Q}$	και	$\frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$
$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ αφού	$\sqrt{3} \in \mathbb{R}$	και	$\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ αφού	$-i \in \mathbb{C}$	και	$-i \notin \mathbb{R}$.



2. ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΑΝΩ ΣΕ ΣΥΝΟΛΑ

ομάζουμε ***τομή*** δύο συνόλων X και Y και τη συμβολίζουμε $X \cap Y$, το σύνολο ων στοιχείων που ανήκουν ταυτόχρονα στα X και Y, δηλαδή

$$X \cap Y = \{x / x \in X \quad \text{και} \quad x \in Y\}$$



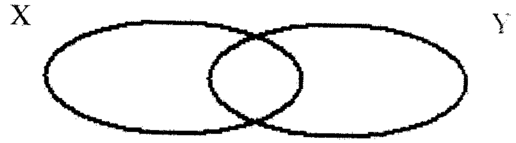
..., τα σύνολα X και Y λέγονται ξένα μεταξύ τους.

Η τομή έχει τις παρακάτω ιδιότητες

$$X \cap X = X$$
$$X \cap Y = Y \cap X$$
$$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z.$$

Ονομάζουμε ***ένωση*** των X και Y και γράφουμε $X \cup Y$, το σύνολο όλων των στοιχείων που ανήκουν είτε στο X, είτε στο Y, δηλαδή

$$X \cup Y = \{x/x \in X \quad \text{είτε} \quad x \in Y\}$$



ο $X \cup Y$ είναι όλο το σκιασμένο μέρος).

Η ένωση έχει τις επόμενες ιδιότητες

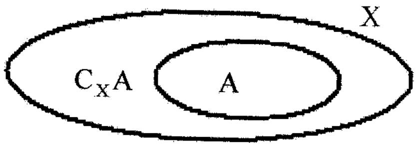
$$X \cup X = X$$
$$X \cup Y = Y \cup X$$
$$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z.$$

Η ένωση και η τομή συνδέονται μεταξύ τους με τις σχέσεις

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$
$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$$

Αν X είναι ένα σύνολο και A ένα υποσύνολο του τότε το ***συμπλήρωμα*** του A ως προς X (συμβολισμός $C_X A$) είναι το σύνολο όλων των στοιχείων του X που δεν είναι στοιχεία του A, δηλαδή

$$C_X A = \{x/x \in X \quad \text{και} \quad x \notin A\}.$$



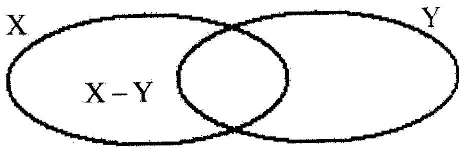
σύμβολο «C_X» έχει τις επόμενες ιδιότητες

$$C_X(C_X A) = A \quad , \quad C_X(X) = \varnothing \quad , \quad C_X(\varnothing) = X$$
$$A \cap (C_X A) = \varnothing \quad , \quad A \cup (C_X A) = X$$
$$C_X(A \cap B) = (C_X A) \cup (C_X B)$$
$$C_X(A \cup B) = (C_X A) \cap (C_X B).$$

κηση 1.1. Να αποδειχθούν οι παραπάνω ιδιότητες.□

ερα μπορούμε να ορίσουμε τη ***διαφορά*** δύο συνόλων X και Y ως εξής:

$$X - Y = \{x / x \in X \quad \text{και} \quad x \notin Y\}.$$



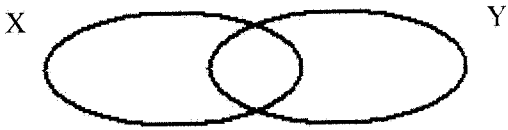
ια λόγια το $X - Y$ έχει ως στοιχεία όλα τα στοιχεία του X που δεν είναι στοιχεία

Έτσι για παράδειγμα

$$\mathbb{C} - \mathbb{R} = \{z / z \in \mathbb{C} \text{ και } z \notin \mathbb{R}\} = \{z / z \in \mathbb{C} \text{ και } \mathrm{Im}(z) \neq 0\}.$$

η ***συμμετρική διαφορά*** δύο συνόλων X και Y ορίζεται από

$$X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X).$$



σάγουμε τώρα μια άλλη πράξη η οποία θα μας επιτρέψει να κατασκευάσουμε νέα ατικά αντικείμενα. Η πράξη αυτή συνίσταται, στην κατασκευή με τη βοήθεια δύο ατικών αντικειμένων x και y, ενός τρίτου αντικειμένου που το συμβολίζουμε

$$(x, y)$$

ονομάζουμε ***διατεταγμένο ζεύγος***.

σχηματισμός διατεταγμένων ζευγών υπόκειται σε ένα μόνο αξίωμα:

έχουμε

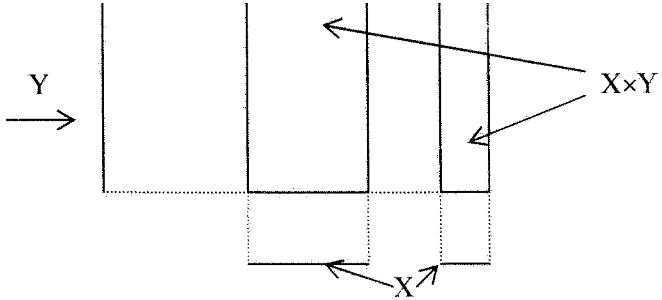
$$(x, y) = (x', y')$$

ι και αρκεί

$$x = x' \text{ και } y = y'.$$

ο ***καρτεσιανό γινόμενο*** $X \times Y$ δύο συνόλων X και Y είναι το σύνολο που ιτίζεται από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη (x, y), όταν το x διατρέχει το σύνολο X και ιατρέχει το σύνολο Y, δηλαδή

$$X \times Y = \{(x, y) / x \in X \quad \text{και} \quad y \in Y\}.$$



ι καρτεσιανό γινόμενο συνόλων έχει τις επόμενες ιδιότητες:

$$X \times (Y \cap Z) = (X \times Y) \cap (X \times Z)$$
$$X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z).$$

Γενίκευση: αν έχουμε n αντικείμενα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ μπορούμε τότε να κατασκευάσουμε α άλλο αντικείμενο που το συμβολίζουμε

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ι το ονομάζουμε ***διατεταγμένη n-άδα*** με τη μόνη αξίωση

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

τε και μόνο όταν

$$x_1 = y_1 \quad , \quad x_2 = y_2 \quad , \quad \ldots \quad , \quad x_n = y_n .$$

Ονομάζουμε ***καρτεσιανό γινόμενο***

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$$

ιν συνόλων $X_1, X_2, \ldots, X_n$ το σύνολο όλων των διατεταγμένων n-άδων $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ υ μπορούμε να κατασκευάσουμε όταν το x_1 διατρέχει το σύνολο X_1, το x_2 διατρέχει σύνολο X_2, κ.ο.κ. το x_n διατρέχει το σύνολο X_n, δηλαδή

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) / x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n\}.$$

Στα Μαθηματικά μια έννοια συχνά χρήσιμη είναι εκείνη της οικογένειας που ορίζεται ; εξής: ας είναι I ένα σύνολο. Αν για κάθε $i \in I$ επιλέξουμε ένα σύνολο X_i, ;ηματίζουμε μια ***οικογένεια συνόλων με δείκτες*** από το I· τη συμβολίζουμε

$$(X_i)_{i \in I} .$$

Οι πράξεις της ένωσης και της τομής δύο συνόλων όπως τις ορίσαμε στην αρχή, εκτείνονται χωρίς κόπο σε μια οποιαδήποτε οικογένεια συνόλων $(X_i)_{i \in I}$. Έτσι:

- η ***ένωση*** των X_i που σημειώνεται $\bigcup_{i \in I} X_i$, είναι το σύνολο των στοιχείων που

ήκουν τουλάχιστον σ' ένα X_i

$$\bigcup_{i \in I} X_i = \{x / \text{υπάρχει } i \in I \text{ ώστε } x \in X_i\}$$

η ***τομή*** των X_i που σημειώνεται $\bigcap_{i\in I} X_i$, είναι το σύνολο των στοιχείων που ταυτόχρονα σ' όλα τα X_i

$$\bigcap_{i\in I} X_i = \{x \,/\, x \in X_i \;\text{ για κάθε }\; \iota \in I\}.$$

αξιοσημείωτο είδος οικογένειας συνόλων είναι ό,τι ονομάζουμε ***διαμελισμό*** ενός
.

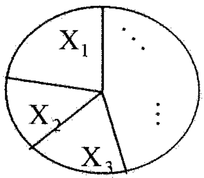
ΣΜΟΣ 1.2.1. Ας είναι X ένα σύνολο. Μια οικογένεια $(X_i)_{i\in I}$ από μη-κενά λα του X λέμε ότι ***διαμελίζει*** το X αν:

1) τα X_i καλύπτουν ολόκληρο το X, δηλαδή

$$X = \bigcup_{i\in I} X_i$$

2) δύο διαφορετικά σύνολα της οικογένειας δε συναντώνται, δηλαδή

$$i \neq j \Rightarrow X_i \cap X_j = \varnothing .$$



ιδειγμα ας πάρουμε $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Τότε τα σύνολα

$$\{1,2,3\},\ \{4,5,6\},\ \{7,8\},\ \{9\}$$

ουν το X, ενώ τα

$$\{1,2,3\},\ \{3,4,5\},\ \{7,8,9\}$$

αμελίζουν αφού τα δύο πρώτα συναντώνται, ενώ η ένωση τους δεν καλύπτει ο το X.

λήθος των διαμελισμών του συνόλου $\{1,2,\ldots,n\}$ ονομάζεται ***n-οστός αριθμός*** και συμβολίζεται S_n.

ταράδειγμα, $S_2 = 2$ αφού υπάρχουν δύο μόνο διαμελισμοί του $\{1,2\}$.

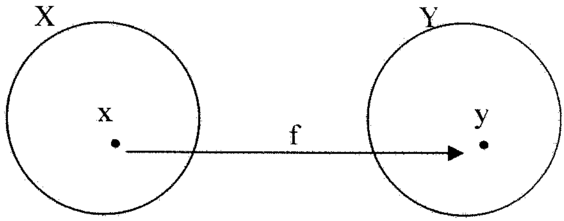
λισμοί του συνόλου $\{1,2,3\}$ είναι οι ακόλουθοι:

$$\{1,2,3\}$$
$$\{1\},\{2,3\}$$
$$\{2\},\{1,3\}$$
$$\{3\},\{1,2\}$$
$$\{1\},\{2\},\{3\}$$

$S_3 = 5$.

3. ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

Ονομάζουμε ***απεικόνιση*** (ή ***συνάρτηση***) από ένα σύνολο X σ' ένα σύνολο Y, ένα ινισμό f που από κάθε στοιχείο του X παράγει ακριβώς ένα στοιχείο του Y.



Το μοναδικό αυτό για το x στοιχείο y, ονομάζεται ***εικόνα*** του x μέσω της f και βολίζεται $f(x)$. Το X είναι το ***σύνολο αφετηρίας*** της f, ενώ το Y το ***σύνολο άφιξης***.
Χρησιμοποιούμε έναν από τους ακόλουθους συμβολισμούς

$$f : X \to Y \quad ή \quad X \xrightarrow{f} Y$$

να σημειώσουμε μια απεικόνιση από το X στο Y, ενώ για να δείξουμε ότι η απεικόνιση $X \to Y$ στέλνει το στοιχείο x του X στο στοιχείο y του Y γράφουμε

$$y = f(x) \quad ή \quad x \overset{f}{\mapsto} y.$$

Ετσι, αν για παράδειγμα θέλουμε να μιλήσουμε για την απεικόνιση του f του $\mathbb{C}$ στο $\mathbb{C}$ στέλνει το z στο z^2+1, θα γράφουμε

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad f(z) = z^2+1$$

$$ή \qquad f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto z^2+1.$$

εξής θα συμβολίζουμε Y^X το σύνολο των απεικονίσεων από το X στο Y.
Ισότητα απεικονίσεων. Ας είναι f και g δύο απεικονίσεις με κοινό σύνολο αφετηρίας και κοινό σύνολο άφιξης το Y

$$f : X \to Y \quad και \quad g : X \to Y.$$

ια κάθε $x \in X$ συμβαίνει

$$f(x) = g(x)$$

οι απεικονίσεις f και g λέμε ότι είναι ***ίσες*** μεταξύ τους

$$f = g.$$

Ετσι δύο απεικονίσεις που έχουν σύνολα αφετηρίας διαφορετικά, ή σύνολα άφιξης ορετικά, δεν θεωρούνται *ποτέ* ίσες.

Παράδειγμα 1.1. Ας πάρουμε τις ακόλουθες απεικονίσεις

$$f,g : \{1,2,3\} \to \{\alpha,\beta,\gamma\}$$

$$f(1)=\alpha \qquad g(1)=\alpha$$
$$f(2)=\alpha \qquad g(2)=\beta$$
$$f(3)=\gamma \qquad g(3)=\gamma\,.$$

Ιαρατηρούμε ότι οι f και g έχουν το ίδιο σύνολο αφετηρίας και άφιξης ενώ

$$f(1)=g(1), \qquad f(2)\neq g(2), \qquad f(3)=g(3)$$

δή διαφέρουν οι τιμές τους μόνο σ' ένα στοιχείο. στο 2.
ύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό $f \neq g$.□

Ιαράδειγμα 1.2. Σε κάθε σύνολο X, αντιστοιχεί μια απεικόνιση

$$I_X : X \to X, \qquad I_X(x)=x$$

:η λέμε ***ταυτοτική απεικόνιση*** του X. □

Ιαράδειγμα 1.3. Ας είναι X ένα σύνολο και A ένα υποσύνολό του. Ονομάζουμε ***κτηριστική συνάρτηση του A*** την απεικόνιση $\varphi_A : X \to \{0,1\}$ που ορίζεται με τον ουθο τρόπο

$\rho_A(x)=1$ αν $x \in A$

$\rho_A(x)=0$ αν $x \notin A$ (δηλαδή αν $x \in C_X A$). □

:άθε $A, B \subseteq X$ ισχύουν τα ακόλουθα:

) $A \subseteq B \Leftrightarrow \varphi_A \leq \varphi_B$

i) $A = B \Leftrightarrow \varphi_A = \varphi_B$

ii) $\varphi_{C_A} = 1 - \varphi_A$

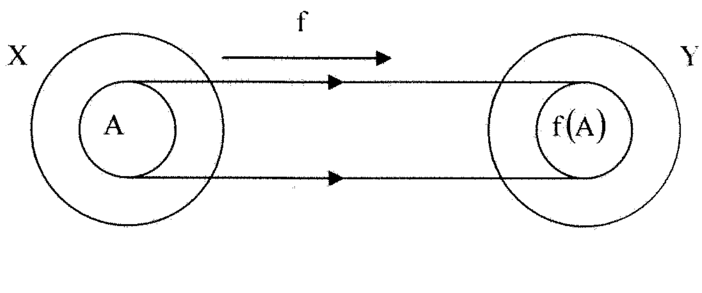
v) $\varphi_{A\cap B} = \varphi_A \cdot \varphi_B$

ʼ) $\varphi_{A\cup B} = \varphi_A + \varphi_B - \varphi_A \cdot \varphi_B$

ʼi) $\varphi_{A\text{-}B} = \varphi_A \cdot \varphi_{C_B} = \varphi_A(1-\varphi_B)$.

Ασκηση 1.2. Να αποδείξετε τις παραπάνω σχέσεις. □

ίναι $f : X \to Y$ μία απεικόνιση, A ένα υποσύνολο του X και B ένα υποσύνολο του Y.

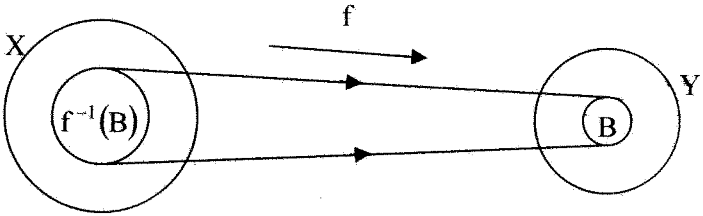


Ονομάζουμε ***εικόνα*** του A μέσω της f -συμβολισμός $f(A)$- το σύνολο των εικόνων σω της f όλων των στοιχείων του A, δηλαδή

$$f(A)=\{f(x)/x \in A\}.$$

Ονομάζουμε ***αντίστροφη εικόνα*** του B μέσω της f -συμβολισμός $f^{-1}(B)$- το σύνολο ων των στοιχείων του X που η f τα στέλνει μέσα στο B, δηλαδή

$$f^{-1}(B)=\{x/x \in X \quad \text{και} \quad f(x) \in B\}.$$



Για παράδειγμα αν έχουμε την απεικόνιση

$$f:\{1,2,3,4,5\} \to \{\alpha,\beta,\gamma\}$$

$$f(1)=f(3)=f(5)=\beta,$$
$$f(2)=\alpha, \quad f(4)=\gamma$$

ε η εικόνα του υποσυνόλου $\{2,3,5\}$ είναι το $\{\alpha,\beta\}$, δηλαδή

$$f(\{2,3,5\})=\{\alpha,\beta\}$$

η αντίστροφη εικόνα των υποσυνόλων $\{\alpha,\beta\}$ και $\{\gamma\}$ είναι αντίστοιχα $\{1,2,3,5\}$ και , δηλαδή

$$f^{-1}(\{\alpha,\beta\})=\{1,2,3,5\} \quad \text{και} \quad f^{-1}(\{\gamma\})=\{4\}.$$

4. Ειδη απεικονισεων

Από τον ορισμό μιας απεικόνισης $f:X \to Y$ φαίνεται ότι είναι δυνατό δύο ρορετικά στοιχεία του X να τα στέλνει η f στο ίδιο στοιχείο του Y. Η $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $)=x^2$ για παράδειγμα, στέλνει τα στοιχεία -2 και 2 στο ίδιο στοιχείο 4, κλπ.

Η προηγούμενη παρατήρηση οδηγεί στον επόμενο ορισμό:

ΣΜΟΣ 1.4.1. Μία απεικόνιση $f : X \to Y$ ονομάζεται ***ένεση*** (ή *1-1*) αν για κάθε
X

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \qquad (1)$$

αν στέλνει διαφορετικά στοιχεία του X σε διαφορετικά στοιχεία του Y.

ι πιο εύχρηστη μορφή της συνθήκης (1) είναι η

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 .$$

πεικόνιση

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ g(n) = 3n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

εση αφού

$$g(n) = g(m) \Rightarrow 3n = 3m \Rightarrow n = m$$

ς πάρουμε το φυσικό αριθμό 5, δεν υπάρχει στοιχείο n του $\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $g(n) = 5$.
αι δυνατό δηλαδή για μια απεικόνιση $f : X \to Y$ να υπάρχουν στοιχεία του Y τα
εν είναι εικόνες στοιχείων του X.

ΙΣΜΟΣ 1.4.2. Η $f : X \to Y$ θα λέγεται ***έφεση*** (ή ***επί***) αν για κάθε στοιχείο y του Y
με να βρούμε ένα στοιχείο x του X τέτοιο ώστε $f(x) = y$, δηλαδή αν

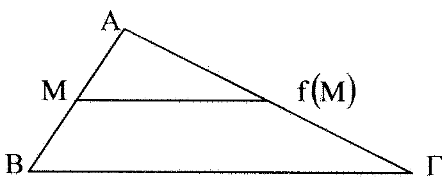
$$f(X) = Y .$$

νδυάζοντας τώρα τους δύο προηγούμενους ορισμούς παίρνουμε ένα τρίτο είδος
ίσεων:

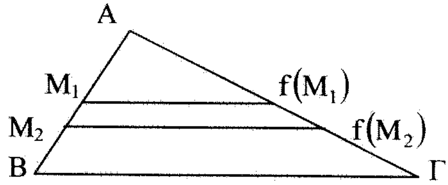
ΙΣΜΟΣ 1.4.3. Μία απεικόνιση $f : X \to Y$ τη λέμε ***αμφίεση*** αν είναι ταυτόχρονα
αι έφεση.

α τετριμμένο παράδειγμα αμφίεσης είναι η ταυτοτική απεικόνιση $I_X : X \to X$ για
νολο X.

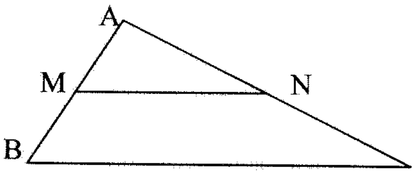
ράδειγμα 1.4. Θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ. Για κάθε σημείο M της πλευράς AB
ίζουμε με $f(M)$ το σημείο που η παράλληλη προς τη ΒΓ, η αγόμενη από το M,
τη ΑΓ:



τον τρόπο αυτό ορίζεται μια απεικόνιση f από το σύνολο $[A,B]$ των σημείων του ›γραμμου τμήματος ΑΒ, στο σύνολο $[A,\Gamma]$ των σημείων του ευθύγραμμου τμήματος Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι πρόκειται για αμφίεση. Πράγματι, $M_1 \neq M_2$ επάγεται $f(M_1) \neq f(M_2)$. Δηλαδή η f είναι ένεση.

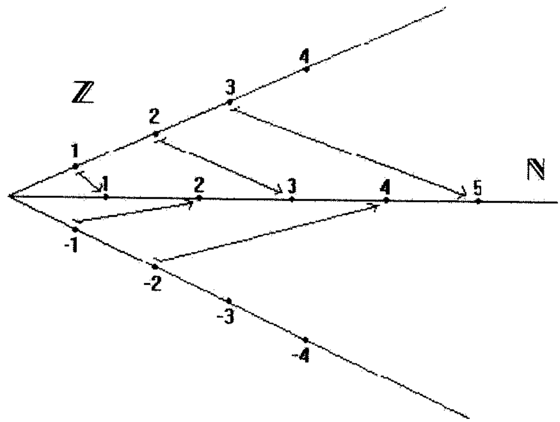


Από την άλλη μεριά αν Ν είναι ένα άλλο σημείο του ΑΓ, τότε το σημείο τομής Μ της με την παράλληλη προς την ΒΓ, που άγεται από το Ν, έχει την ιδιότητα $f(M) = N$, ιδή η f είναι έφεση.



. □

Παράδειγμα 1.5. Η παρακάτω διάταξη ορίζει μία αμφίεση από το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ›αίων στο σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών



. □

Η επόμενη πρόταση είναι σημαντική γιατί μας δίνει πληροφορίες για απεικονίσεις ιξύ πεπερασμένων συνόλων.

ΡΟΤΑΣΗ 1.4.4. Θεωρούμε μια απεικόνιση

$$f:\{x_1,\dots,x_m\}\to\{y_1,\dots,y_n\}.$$

) Αν η f είναι ένεση (1-1), τότε $m \le n$.

) Αν η f είναι έφεση (επί), τότε $m \ge n$.

) Αν η f είναι αμφίεση, τότε $m = n$.

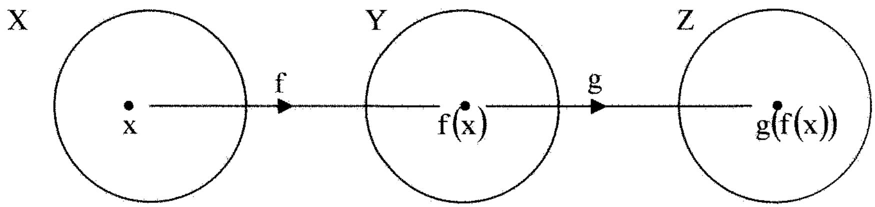
πόδειξη. (α) Αν η f είναι ένεση τότε τα στοιχεία $f(x_1),\dots,f(x_m)$ του συνόλου
$,y_n\}$ είναι ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους, οπότε $m \le n$.
ν η f είναι έφεση, τότε το σύνολο $\{f(x_1),\dots,f(x_m)\}$ καλύπτει το σύνολο $\{y_1,\dots,y_n\}$
α $m \ge n$.
ν η f είναι αμφίεση, τότε η f είναι ένεση και έφεση, οπότε $m \le n$ και $m \ge n$, δηλαδή
. □

5. ΣΥΝΘΕΣΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ

ούμε δύο απεικονίσεις

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z.$$

θε στοιχείο x του X, η f αντιστοιχεί ένα μοναδικό στοιχείο $y = f(x)$ του Y. Η g
ει αυτό το y με τη σειρά της σε ένα μοναδικό στοιχείο $z = g(y)$ του Z.



με την προηγούμενη διαδικασία σε κάθε στοιχείο x του X αντιστοιχίσαμε ένα
ικό στοιχείο $g(f(x))$ του Z. Μ' άλλα λόγια ορίσαμε μια απεικόνιση του X στο Z,
η συμβολίζουμε $g_\circ f$ και την ονομάζουμε ***σύνθεση*** των f και g:

$$g\circ f : X \to Z, (g\circ f)(x) = g(f(x)), \text{ για κάθε } x \in X.$$

α πρέπει να τονίσουμε σοβαρά εδώ ότι η σύνθεση $g\circ f$ δύο απεικονίσεων f και g
ται τότε και μόνο όταν το σύνολο άφιξης της f συμπίπτει με το σύνολο αφετηρίας της

ν A είναι ένα υποσύνολο του X, τότε η εικόνα του από την $g\circ f$ είναι

$$(g\circ f)(A) = g(f(A)),$$

ν C είναι ένα υποσύνολο του Z, τότε η αντίστροφη εικόνα του από την $g\circ f$ είναι

$$(g\circ f)^{-1}(C)=f^{-1}\left(g^{-1}(C)\right).$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.5.1. Η σύνθεση δύο ενέσεων (εφέσεων αντίστ.) είναι ένεση (έφεση στ)

Απόδειξη. Θεωρούμε τις απεικονίσεις

$$f : X \to Y, \qquad g : Y \to Z.$$

Ας υποθέσουμε ότι οι f και g είναι ενέσεις· τότε

$$(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)\Rightarrow g(f(x_1))=g(f(x_2)) \overset{g\text{ ένεση}}{\Rightarrow} f(x_1)=f(x_2) \overset{f\text{ ένεση}}{\Rightarrow} x_1=x_2$$

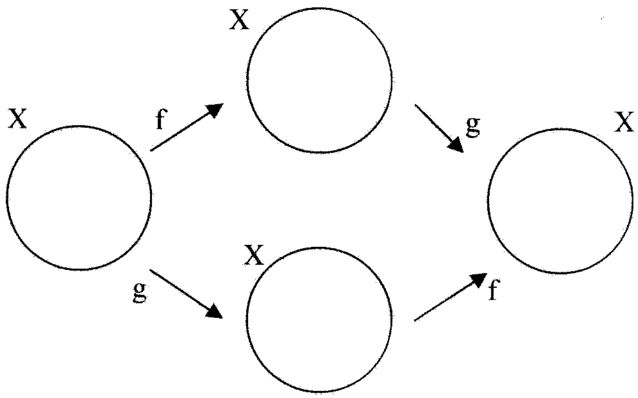
ιδή η $g\circ f$ είναι ένεση.

Ας υποθέσουμε ότι οι f και g είναι εφέσεις κι ας εκλέξουμε ένα στοιχείο z του Z. Τότε) η g είναι έφεση υπάρχει $y\in Y$ τέτοιο ώστε $g(y)=z$. Για το y αυτό, αφού η f είναι η, υπάρχει $x\in X$ έτσι ώστε $f(x)=y$, οπότε

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(y)=z$$

η $g\circ f$ είναι έφεση.□

Ας πάρουμε τώρα δύο απεικονίσεις $f,g : X\to X$.



ι φανερό ότι οι συνθέσεις $g\circ f$ και $f\circ g$ ορίζονται και μάλιστα είναι απεικονίσεις από στο X.

Εύλογα κάποιος μπορεί να διερωτηθεί αν η $g\circ f$ είναι ίση με την $f\circ g$. Γενικά αυτό δεν βαίνει όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.
Ας θεωρήσουμε

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, \qquad f(n)=n^2+1$$
$$g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, \qquad g(n)=n+1.$$

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(n^2 + 1) = (n^2 + 1) + 1 = n^2 + 2$$

$$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(n+1) = (n+1)^2 + 1 = n^2 + 2n + 2 .$$

έχουμε

$$g \circ f \neq f \circ g$$

η ισότητα

$$n^2 + 2 = n^2 + 2n + 2$$

ληθεύει για κάθε φυσικό αριθμό n.
ατά συνέπεια, η σύνθεση απεικονίσεων *δεν είναι γενικά αντιμεταθετική*. Είναι όμως *ταιριστική*.
ιο συγκεκριμένα ας πάρουμε τρεις απεικονίσεις

$$f : X \to Y, \qquad g : Y \to Z, \qquad h : Z \to T$$

συγκρίνουμε τις απεικονίσεις

$$(h \circ g) \circ f \quad \text{και} \quad h \circ (g \circ f).$$

α – πρώτα και οι δύο έχουν ως σύνολο αφετηρίας το X και ως σύνολο άφιξης το T.
ην άλλη μεριά για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

$$[h \circ (g \circ f)](x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))).$$

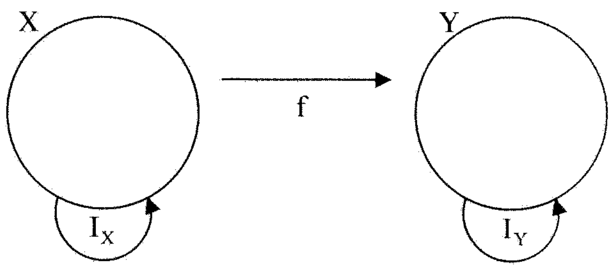
λλα λόγια για κάθε $x \in X$

$$[h \circ (g \circ f)](x) = [h \circ (g \circ f)](x)$$

:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f). \square$$

α εξετάσουμε στη συνέχεια το ρόλο που παίζουν οι ταυτοτικές απεικονίσεις στη εση απεικονίσεων.
ια το σκοπό αυτό παίρνουμε μια απεικόνιση $f : X \to Y$ και τις ταυτοτικές ονίσεις I_X και I_Y αντίστοιχα



άθε $x \in X$ θα έχουμε

$$f(x) = f(I_X(x)) = (f \circ I_X)(x)$$

$$f(x)=I_Y(f(x))=(I_Y\circ f)(x).$$

ιτά συνέπεια

$$f\circ I_X=f=I_Y\circ f.$$

6. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΜΙΑΣ ΑΜΦΙΕΣΗΣ

Θεωρούμε μια αμφίεση $f:X\to Y$.

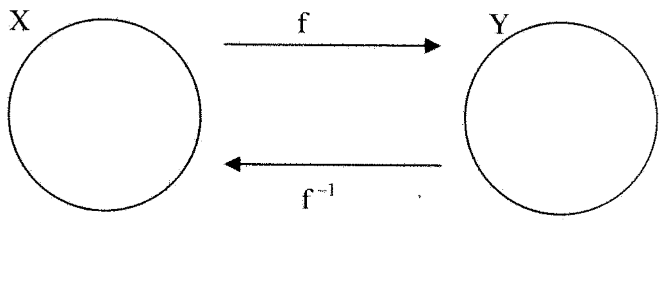
ΛΗΜΜΑ 1.6.1. Για κάθε στοιχείο y του Y υπάρχει ένα και μόνο ένα στοιχείο x του X, τοιο ώστε

$$y=f(x).$$

Απόδειξη. Αφού η f είναι έφεση θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x\in X$ έτσι ώστε $x)=y$. Αν x' είναι ένα άλλο στοιχείο του X με $f(x')=y$, τότε από τη σχέση $x)=f(x')$ αν λάβουμε υπόψη ότι η f είναι ένεση παίρνουμε $x=x'$.□

Αν λοιπόν σε κάθε στοιχείο y του Y αντιστοιχίσουμε το μοναδικό $x\in X$ για το οποίο ιμβαίνει $f(x)=y$, ορίζουμε μ' αυτό τον τρόπο μία απεικόνιση f^{-1} του Y στο X, δηλαδή

$$f^{-1}(y)=x\Leftrightarrow f(x)=y.$$



Η f^{-1} ονομάζεται ***αντίστροφη*** της f και επαληθεύει τις σχέσεις

$$f^{-1}\circ f=I_X \quad , \quad f\circ f^{-1}=I_Y.$$

ραγματικά για κάθε $x\in X$ και $y\in Y$ έχουμε

$$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=x=I_X(x)$$

ι

$$(f\circ f^{-1})(y)=f(f^{-1}(y))=y=I_Y(y).$$

ΟΤΑΣΗ 1.6.1. Θεωρούμε μία απεικόνιση $f : X \to Y$. Αν υπάρχει απεικόνιση X τέτοια ώστε

$$g \circ f = I_X \qquad \text{και} \qquad f \circ g = I_Y$$

είναι αμφίεση και μάλιστα η αντίστροφή της είναι η g.

όδειξη. (α) η f είναι ένεση:

$$f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow I_X(x_1) = I_X(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 .$$

είναι έφεση· πραγματικά, για κάθε $y \in Y$, το στοιχείο $x = g(y)$ του X

ίζεται από την f στο y αφού

$$f(x) = f(g(y)) = (f \circ g)(y) = I_Y(y) = y .$$

τόν είναι αμφίεση, άρα υπάρχει η αντίστροφή της f^{-1}. Θα δείξουμε ότι $f^{-1} = g$.

$$g = I_X \circ g = (f^{-1} \circ f) \circ g = f^{-1} \circ (f \circ g) = f^{-1} \circ I_Y = f^{-1} . \square$$

ΡΙΣΜΑ 1.6.2. Η σύνθεση $g \circ f$ δυο αμφιέσεων f και g είναι αμφίεση της οποίας η οφη απεικόνιση είναι η

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} .$$

όδειξη.

$$X \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y \underset{g^{-1}}{\overset{g}{\rightleftarrows}} Z$$

$$f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ [f \circ (f^{-1} \circ g^{-1})] = g \circ [(f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}] = g \circ (I_Y \circ g^{-1}) = g \circ g^{-1} = I_Z$$

$$\circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ [g^{-1} \circ (g \circ f)] = f^{-1} \circ [(g^{-1} \circ g) \circ f] = f^{-1} \circ (I_Y \circ f) = f^{-1} \circ f = I_X$$

ύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, η $f^{-1} \circ g^{-1}$ είναι η αντίστροφη της $g \circ f$,

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} . \square$$

ΡΙΣΜΑ 1.6.3. Η αντίστροφη απεικόνιση f^{-1} μιας αμφίεσης f είναι και αυτή ι και μάλιστα

$$(f^{-1})^{-1} = f .$$

όδειξη. Από τις σχέσεις

$$f^{-1} \circ f = I_X \quad , \quad f \circ f^{-1} = I_Y$$

κύπτει σύμφωνα με το θεώρημα ότι η f^{-1} είναι αμφίεση, της οποίας η αντίστροφη ι η f, δηλαδή

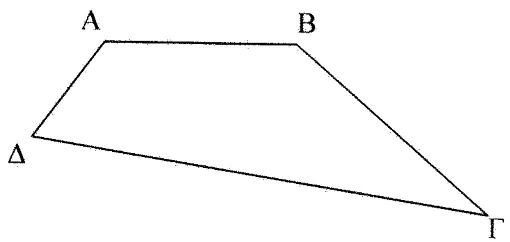
$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f \, . \square$$

Όπως είδαμε σε προηγούμενη παράγραφο, αν υπάρχει μια αμφίεση μεταξύ δυο ερασμένων συνόλων, τότε τα σύνολα αυτά έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Η ατήρηση αυτή μας οδηγεί στον ορισμό της ισοπληθίας για οποιαδήποτε σύνολα. Θα λέμε ότι ένα σύνολο X είναι ***ισοπληθές*** προς ένα σύνολο Y αν υπάρχει μία ίεση $f : X \to Y$. Ιδιαίτερα κάθε σύνολο ισοπληθές προς το σύνολο των φυσικών ιμών $\mathbb{N}$ ονομάζεται ***αριθμήσιμο*** σύνολο.

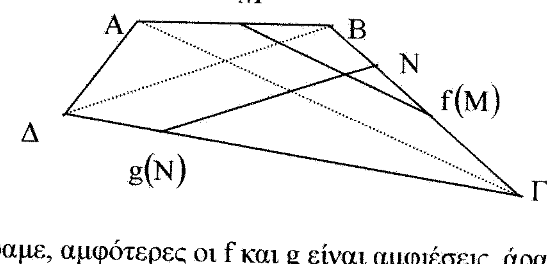
Από τα προηγούμενα δύο πορίσματα προκύπτει ότι:

- **Αν το X είναι ισοπληθές προς το Y και το Y είναι ισοπληθές προς το Z, τότε το X είναι ισοπληθές προς το Z**
- **Αν το X είναι ισοπληθές προς το Y, τότε και το Y είναι ισοπληθές προς το X.**

Πρόβλημα 1.3. Να δείξετε ότι υπάρχει μια αμφίεση από το σύνολο των σημείων του ιγραμμου τμήματος ΑΒ σ' εκείνο των σημείων του ΓΔ στο παρακάτω τετράπλευρο:



Λύση. Άγουμε τις διαγώνιους ΑΓ, ΒΔ και θεωρούμε τις απεικονίσεις f,g όπως τις αμε σε προηγούμενο παράδειγμα:



ς είδαμε, αμφότερες οι f και g είναι αμφιέσεις, άρα αμφίεση θα είναι και η εση τους $g \circ f$. □

7. Η ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΗ ΤΟΥ $\mathbb{N}$

Στην παράγραφο αυτή, θα δώσουμε μια συνταγή δημιουργίας αντιγράφων του $\mathbb{N}$. Για σκοπό αυτό μας χρειάζονται τα εξής υλικά: ένα σύνολο Φ, ένα στοιχείο του $\mathbf{0} \in \Phi$ και νεση $\delta : \Phi \to \Phi$ που τη λέμε ***συνάρτηση διαδοχής*** έτσι ώστε:

$\mathbf{0} \notin \delta(\Phi)$

ν $A \subseteq \Phi$ είναι τέτοιο ώστε

- $\mathbf{0} \in A$
- Αν $\boldsymbol{\alpha} \in A \Rightarrow \delta(\boldsymbol{\alpha}) \in A$

τότε $A = \Phi$.

Θα δείξουμε ότι τα παραπάνω αξιώματα αρκούν για να κάνουμε το Φ ένα αντίγραφο $\mathbb{N}$.

Εφαρμόζοντας το p_2) στο σύνολο $A = \{\mathbf{0}, \delta(\mathbf{0}), \delta(\delta(\mathbf{0})), \ldots\}$ βρίσκουμε ότι $A = \Phi$. Συμφωνούμε τα στοιχεία $\delta(\mathbf{0}), \delta(\delta(\mathbf{0})), \ldots$ να τα παριστάνουμε με τα σύμβολα $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots$ στοιχα. Έτσι

$$\Phi = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots\}.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.7.1 (***Αρχή της επαγωγής***) Θεωρούμε μία πρόταση $P(\mathbf{n})$ που εξαρτάται το στοιχείο $\mathbf{n} \in \Phi$. Αν η $P(\mathbf{0})$ είναι αληθής και με την υπόθεση ότι η $P(\mathbf{k})$ είναι θής αποδείξουμε ότι και η $P(\delta(\mathbf{k}))$ είναι αληθής, τότε η $P(\mathbf{n})$ είναι αληθής για όλα τα χεία $\mathbf{n} \in \Phi$.

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο αλήθειας της P:

$$A = \{\mathbf{n} \in \Phi / P(\mathbf{n}) \text{ αληθής}\}$$

την υπόθεση, $\mathbf{0} \in A$ ενώ $\mathbf{k} \in A$ συνεπάγεται $\delta(\mathbf{k}) \in A$. επώς, από το αξίωμα p_2) συνάγουμε $A = \Phi$, δηλαδή η $P(\mathbf{n})$ είναι αληθής για κάθε $\mathbb{N}$.□

Το αξίωμα p_2) χρησιμοποιείται ακόμη και για επαγωγικές κατασκευές.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.7.2. Ας είναι $K(\mathbf{n})$ μια κατασκευή που εξαρτάται από το στοιχείο $\mathbf{n} \in \Phi$. η $K(\mathbf{0})$ μπορεί να πραγματοποιηθεί, ενώ με την υπόθεση ότι η $K(\mathbf{k})$ πραγματοποιείται, ρούμε να πραγματοποιήσουμε και την $K(\delta(\mathbf{k}))$, τότε η $K(\mathbf{n})$ πραγματοποιείται για τα $\mathbf{n} \in \Phi$.

Απόδειξη. Δεν έχουμε παρά να εφαρμόσουμε το p_2) στο υποσύνολο

$$A = \{\mathbf{n} \in \Phi / K(\mathbf{n}) \text{ πραγματοποιείται}\}. \ \square$$

Για οποιαδήποτε στοιχεία $\mathbf{m},\mathbf{n} \in \Phi$ ορίζουμε το άθροισμα τους $\mathbf{m}+\mathbf{n}$ με την όλουθη επαγωγική κατασκευή:

$$\mathbf{m}+\mathbf{0}=\mathbf{m} \quad , \quad \mathbf{m}+\delta(\mathbf{n})=\delta(\mathbf{m}+\mathbf{n}).$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.7.3. Για οποιαδήποτε $\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{k} \in \Phi$ ισχύουν τα ακόλουθα:
i) $(\mathbf{m}+\mathbf{n})+\mathbf{k}=\mathbf{m}+(\mathbf{n}+\mathbf{k})$, $\mathbf{m}+\mathbf{n}=\mathbf{n}+\mathbf{m}$
ii) $\mathbf{m}+\mathbf{n}=\mathbf{0}$ συνεπάγεται $\mathbf{m}=\mathbf{0}$ και $\mathbf{n}=\mathbf{0}$
iii) $\mathbf{m}+\mathbf{k}=\mathbf{n}+\mathbf{k}$ συνεπάγεται $\mathbf{m}=\mathbf{n}$ (***νόμος της διαγραφής***).

Απόδειξη. ii) Ας υποθέσουμε ότι ένα τουλάχιστον από τα $\mathbf{m},\mathbf{n}$ είναι διάφορο του $\mathbf{0}$, χ. $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$. Τότε $\mathbf{n}=\delta(\mathbf{k})$ με $\mathbf{k} \in \Phi$. Έτσι η υπόθεση $\mathbf{m}+\mathbf{n}=\mathbf{0}$ γίνεται $\mathbf{m}+\delta(\mathbf{k})=\mathbf{0}$ ή $\mathbf{m}+\mathbf{k})=\mathbf{0}$, πράγμα που δεν μπορεί να συμβαίνει λόγω του αξιώματος p_1).

iii) Η iii) είναι αληθής για $\mathbf{k}=\mathbf{0}$:

$$\mathbf{m}+\mathbf{0}=\mathbf{n}+\mathbf{0} \quad \text{συνεπάγεται} \quad \mathbf{m}=\mathbf{n}$$

; υποθέσουμε ότι η iii) αληθεύει για $\mathbf{k} \in \Phi$, δηλαδή ότι $\mathbf{m}+\mathbf{k}=\mathbf{n}+\mathbf{k}$ συνεπάγεται $+\mathbf{k}=\mathbf{n}+\mathbf{k}$.
α δείξουμε την iii) και για το $\delta(\mathbf{k})$. Πράγματι, από την $\mathbf{m}+\delta(\mathbf{k})=\mathbf{n}+\delta(\mathbf{k})$ παίρνουμε $\mathbf{m}+\mathbf{k})=\delta(\mathbf{n}+\mathbf{k})$ και καθώς από την υπόθεση η δ είναι ένεση, συνάγουμε $+\mathbf{k}=\mathbf{n}+\mathbf{k}$, απ' όπου $\mathbf{m}=\mathbf{n}$ όπως το θέλαμε.
ετσι η iii) είναι αληθής για κάθε $\mathbf{k} \in \Phi$.

Την απόδειξη της i) την αφήνουμε στον αναγνώστη ως άσκηση.□

Για οποιαδήποτε στοιχεία $\mathbf{m},\mathbf{n} \in \Phi$, γράφουμε $\mathbf{m} \leq \mathbf{n}$, αν υπάρχει $\mathbf{k} \in \Phi$ ώστε $+\mathbf{k}=\mathbf{n}$. Το $\mathbf{k}$ αυτό είναι μοναδικό (γιατί αν $\mathbf{k}'$ είναι τέτοιο ώστε $\mathbf{m}+\mathbf{k}'=\mathbf{n}$, τότε $+\mathbf{k}=\mathbf{m}+\mathbf{k}'$, οπότε $\mathbf{k}=\mathbf{k}'$), ονομάζεται ***διαφορά*** του $\mathbf{n}$ από το $\mathbf{m}$ και συμβολίζεται

$$\mathbf{n}-\mathbf{m}.$$

Αν $\mathbf{m} \leq \mathbf{n}$ και $\mathbf{m} \neq \mathbf{n}$ τότε γράφουμε $\mathbf{m}<\mathbf{n}$.□

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.7.4. i) Για οποιαδήποτε $\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{k} \in \Phi$ ισχύουν:
$\leq \mathbf{m}$
$\leq \mathbf{n}$ και $\mathbf{n} \leq \mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{m} \leq \mathbf{k}$
$< \mathbf{n}$ και $\mathbf{n} < \mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{m} < \mathbf{k}$
$\leq \mathbf{n}$ και $\mathbf{n} \leq \mathbf{m} \Rightarrow \mathbf{m} = \mathbf{n}$.
ii) (***Αρχή της τριχοτομίας***) Για οποιαδήποτε $\mathbf{m},\mathbf{n} \in \Phi$ ακριβώς μία από τις παρακάτω έσεις ισχύει:

$$\mathbf{m}<\mathbf{n}, \ \mathbf{m}=\mathbf{n}, \ \mathbf{m}>\mathbf{n}$$

δειξη. Θα αποδείξουμε μόνο το ii) Για κάθε $\mathbf{m} \in \Phi$, θεωρούμε την ακόλουθη
ι:

$P_{\mathbf{m}}(\mathbf{k})$: μία τουλάχιστον από τις παρακάτω σχέσεις αληθεύει:

$$\mathbf{m} < \mathbf{k}, \ \mathbf{m} = \mathbf{k}, \ \mathbf{m} > \mathbf{k}.$$

$_{\mathbf{m}}(\mathbf{0})$ είναι αληθής, αφού είτε $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ είτε $\mathbf{m} > \mathbf{0}$.

θέτουμε ότι η $P_{\mathbf{m}}(\mathbf{k})$ είναι αληθής και προχωρούμε ν' αποδείξουμε ότι η $P_{\mathbf{m}}(\delta(\mathbf{k}))$ ηθής, δηλαδή ότι ικανοποιείται μία τουλάχιστον από τις σχέσεις:

$$\mathbf{m} < \delta(\mathbf{k}), \qquad \mathbf{m} = \delta(\mathbf{k}), \qquad \mathbf{m} > \delta(\mathbf{k})$$

τι, αν ισχύει $\mathbf{m} < \mathbf{k}$, τότε καθώς $\mathbf{k} < \delta(\mathbf{k})$ θα έχουμε και $\mathbf{m} < \delta(\mathbf{k})$.

$\mathbf{k}$, τότε καθώς $\mathbf{k} < \delta(\mathbf{k})$ θα έχουμε και $\mathbf{m} < \delta(\mathbf{k})$.

ιν $\mathbf{m} > \mathbf{k}$ τότε $\mathbf{k} + \mathbf{r} = \mathbf{m}$, για κάποιο $\mathbf{r} \in \Phi - \{0\}$. Είναι $\mathbf{r} = \delta(\mathbf{p}), \mathbf{p} \in \Phi$, οπότε $) = \mathbf{m}$, ή $\delta(\mathbf{k}) + \mathbf{p} = \mathbf{m}$. Αν $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, τότε $\mathbf{m} = \delta(\mathbf{k})$. Αν $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$, τότε $\delta(\mathbf{k}) < \mathbf{m}$.

ιδείξαμε λοιπόν ότι για οποιαδήποτε $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \Phi$ μία τουλάχιστον από τις παρακάτω αληθεύει:

$$\mathbf{m} < \mathbf{n}, \ \mathbf{m} = \mathbf{n}, \ \mathbf{m} > \mathbf{n}$$

ουμε ότι το πολύ μία από αυτές αληθεύει. Πράγματι, αν συμβαίνει

$$\mathbf{m} < \mathbf{n} \ \text{ και } \ \mathbf{m} = \mathbf{n}$$

$$\mathbf{m} + \mathbf{k} = \mathbf{n} \ \text{ και } \ \mathbf{m} = \mathbf{n}, \ \text{ με } \mathbf{k} \neq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{m} + \mathbf{k} = \mathbf{m} \ \text{ με } \mathbf{k} \neq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{m} + \mathbf{k} = \mathbf{m} + \mathbf{0}, \ \mathbf{k} \neq \mathbf{0}$$

νόμος διαγραφής δίνει $\mathbf{k} = \mathbf{0}$, άτοπο.

βαίνει

$$\mathbf{m} < \mathbf{n} \ \text{ και } \ \mathbf{n} < \mathbf{m}$$

$$\mathbf{m} + \mathbf{k} = \mathbf{n} \ \text{ και } \ \mathbf{n} + \mathbf{p} = \mathbf{m} \ \text{ με } \mathbf{k}, \mathbf{p} \in \Phi - \{0\}$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{n} + \mathbf{p} = (\mathbf{m} + \mathbf{k}) + \mathbf{p} = \mathbf{m} + (\mathbf{k} + \mathbf{p}) \quad \mathbf{k}, \mathbf{p} \in \Phi - \{0\},$$

$$\mathbf{m} + \mathbf{0} = \mathbf{m} + (\mathbf{k} + \mathbf{p}) \qquad \mathbf{k}, \mathbf{p} \in \Phi - \{0\}$$

$$\mathbf{k} + \mathbf{p} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{k}, \mathbf{p} \in \Phi - \{0\}$$

κά

$$\mathbf{k} = \mathbf{0} = \mathbf{p},$$

]

οποιαδήποτε $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \Phi$ ορίζουμε το γινόμενο $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}$ (ή απλά $\mathbf{mn}$) με τον ακόλουθο κό τρόπο.

$$\mathbf{m} \cdot 0 = 0, \qquad \mathbf{m} \cdot \delta(\mathbf{n}) = \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{m}.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.7.5 Για οποιαδήποτε $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{k} \in \Phi$ ισχύουν τα ακόλουθα:
i) $(\mathbf{mn})\mathbf{k} = \mathbf{m}(\mathbf{nk})$, $\quad \mathbf{mn} = \mathbf{nm}$, $\qquad \mathbf{m1} = \mathbf{m}$
ii) $\mathbf{m}(\mathbf{n} + \mathbf{k}) = \mathbf{mn} + \mathbf{mk}$
iii) $\mathbf{mn} = 0$ συνεπάγεται $\mathbf{m} = 0$ ή $\mathbf{n} = 0$
iv) $\mathbf{mk} = \mathbf{nk}$, $\mathbf{k} \neq 0$ συνεπάγεται $\mathbf{m} = \mathbf{n}$

Απόδειξη. Άσκηση.□

επόμενη πρόταση είναι πολύ χρήσιμη:

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.7.6. (***Αρχή καλής διάταξης***) Κάθε μη-κενό υποσύνολο Ε του Φ έχει ένα άχιστο στοιχείο, δηλαδή υπάρχει $\mathbf{n}_0 \in E$ τέτοιο ώστε

$$\mathbf{n}_0 \leq \mathbf{k} \text{ για κάθε } \mathbf{k} \in E.$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε αντίθετα ότι το Ε δεν έχει ελάχιστο στοιχείο, κι ας ωρήσουμε το σύνολο

$$A = \{\mathbf{n} \in \Phi / \mathbf{n} \leq \mathbf{k} \text{ για κάθε } \mathbf{k} \in E\}.$$

Προφανώς $0 \in A$. Ας είναι τώρα $\mathbf{n} \in A$, δηλαδή $\mathbf{n} \leq \mathbf{k}$, για κάθε $\mathbf{k} \in E$. Το $\mathbf{n}$ δεν ήκει στο Ε γιατί διαφορετικά θα ήταν ελάχιστο στοιχείο του. Έτσι, $\mathbf{n} < \mathbf{k}$ για κάθε $\in E$ και άρα $\delta(\mathbf{n}) = \mathbf{n} + 1 \leq \mathbf{k}$ για κάθε $\mathbf{k} \in E$, δηλαδή $\delta(\mathbf{n}) \in A$. Η αρχή της επαγωγής νει $A = \Phi$.

Αφού το Ε είναι από την υπόθεση διάφορο του κενού, μπορούμε να επιλέξουμε ένα οιχείο $\mathbf{k}$ σ' αυτό. Το $\mathbf{k} + 1 \in \Phi = A$ και άρα $\mathbf{k} + 1 \leq \mathbf{k}$, άτοπο.□

Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της καλής διάταξης για να δώσουμε δυο χρήσιμες ρφές της μαθηματικής μεθόδου. Για $\mathbf{n}_0 \in \Phi$ θέτουμε

$$\Phi(\mathbf{n}_0) = \{\mathbf{n}/\mathbf{n} \in \Phi \text{ και } \mathbf{n} \geq \mathbf{n}_0\}.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.7.7. Θεωρούμε μία πρόταση $P(\mathbf{n})$ που εξαρτάται από το $\mathbf{n} \in \Phi$. Αν $(\mathbf{n}_0)$ είναι αληθής, ενώ

$$P(\mathbf{k}) \text{ αληθής } (\mathbf{k} > \mathbf{n}_0) \text{ συνεπάγεται } P(\mathbf{k} + 1) \text{ αληθής},$$

τε η $P(\mathbf{n})$ είναι αληθής για κάθε $\mathbf{n} \in \Phi(\mathbf{n}_0)$.

Απόδειξη. Θέτουμε

$$A = \{\mathbf{n} / \mathbf{n} \in \Phi,\ P(\mathbf{n}) \text{ αληθής}\}.$$

Θα έχουμε $\mathbf{n}_0 \in A$ ενώ

$$\mathbf{k} \in A\,(\mathbf{k} > \mathbf{n_0}) \text{ συνεπάγεται } \mathbf{k}+\mathbf{1} \in A. \qquad (\varepsilon_1)$$

δείξουμε ότι $A = \Phi(\mathbf{n_0})$. Ας υποθέσουμε αντίθετα ότι $A \neq \Phi(\mathbf{n_0})$ κι ας είναι $\mathbf{k}$ το
ο στοιχείο του συνόλου $B = \Phi(\mathbf{n_0}) - A$. Αφού $\mathbf{k} \in \Phi(\mathbf{n_0})$ θα είναι $\mathbf{n_0} \leq \mathbf{k}$ και
$\mathbf{n_0}$ δεν ανήκει στο B, θα είναι $\mathbf{n_0} < \mathbf{k}$.
ο $\mathbf{k}-\mathbf{1}$ δεν ανήκει στο B, πράγμα που σημαίνει ότι $\mathbf{k}-\mathbf{1} \in A$.
ρίπτωση αυτή η (ε_1) δίνει $(\mathbf{k}-\mathbf{1})+\mathbf{1} = \mathbf{k} \in A$.
ιπόν $A = \Phi(\mathbf{n_0})$, όπως το επιθυμούμε.□

ράδειγμα 1.7. (***Ανισότητα Bernoulli***) Για κάθε $\mathbf{n} \geq \mathbf{2}$ ισχύει

$$(\mathbf{1}+\mathbf{k})^{\mathbf{n}} > \mathbf{1}+\mathbf{kn} \quad , \quad \mathbf{k} > \mathbf{0}.$$

ρόταση είναι αληθής για $\mathbf{n} = \mathbf{2}$:

$$(\mathbf{k}+\mathbf{1})^2 = \mathbf{1}+\mathbf{2k}+\mathbf{k}^2 > \mathbf{1}+\mathbf{2k}$$

οθέτουμε αληθινό τον ισχυρισμό μας για τον $\mathbf{n}$ και προχωρούμε να τον
ξουμε για τον $\mathbf{n}+\mathbf{1}$:

$$(\mathbf{1}+\mathbf{k})^{\mathbf{n}+1} = (\mathbf{1}+\mathbf{k})^{\mathbf{n}}(\mathbf{1}+\mathbf{k}) > (\mathbf{1}+\mathbf{nk})(\mathbf{1}+\mathbf{k}) = \mathbf{1}+(\mathbf{n}+\mathbf{1})\mathbf{k}+\mathbf{nk}^2 > \mathbf{1}+(\mathbf{n}+\mathbf{1})\mathbf{k}$$

νεπώς από την προηγούμενη πρόταση, ο ισχυρισμός μας είναι αληθής για όλα τα
□

ΟΤΑΣΗ 1.7.8. Ας είναι $P(\mathbf{n})$ μια πρόταση που εξαρτάται από το $\mathbf{n} \in \Phi$ κι ας
ουμε ότι
$\mathbf{n_0})$ είναι αληθής ενώ
$\mathbf{m})$ αληθής για όλα τα $\mathbf{m}$ με $\mathbf{n_0} \leq \mathbf{m} < \mathbf{k}$ συνεπάγεται $P(\mathbf{k})$ αληθής.
$P(\mathbf{n})$ είναι αληθής για όλα τα $\mathbf{n} \in \Phi(\mathbf{n_0})$.

όδειξη. Ανάλογη της προηγούμενης. Θέτουμε

$$A = \{\mathbf{n}/\mathbf{n} \in \Phi \text{ και } P(\mathbf{n}) \text{ αληθής}\}.$$

ουμε $\mathbf{n_0} \in A$, ενώ

$$\mathbf{m} \in A \text{ για όλα τα } \mathbf{m} \text{ με } \mathbf{n_0} \leq \mathbf{m} < \mathbf{k} \text{ συνεπάγεται } \mathbf{k} \in A. \qquad (\varepsilon_2)$$

δείξουμε ότι $A = \Phi(\mathbf{n_0})$. Ας υποθέσουμε αντίθετα, ότι $A \neq \Phi(\mathbf{n_0})$ κι ας είναι $\mathbf{k}$ το
το στοιχείο του συνόλου $B = \Phi(\mathbf{n_0}) - A$. Και πάλι, $\mathbf{n_0} < \mathbf{k}$.
θε $\mathbf{m}$ με $\mathbf{n_0} \leq \mathbf{m} < \mathbf{k}$ θα συμβαίνει $\mathbf{k} \notin B$ και άρα $\mathbf{k} \in A$, οπότε από την (ε_2)
υμε $\mathbf{m} \in A$, άτοπο.□

ράδειγμα 1.8. Η ακολουθία ($f_{\mathbf{n}}$) του ***Fibonacci***, ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

$$f_0 = \mathbf{1} \quad , \quad f_1 = \mathbf{1} \quad , \quad f_{\mathbf{n}} = f_{\mathbf{n}-1} + f_{\mathbf{n}-2} \qquad \mathbf{n} \geq \mathbf{2}.$$

μοποιώντας την προηγούμενη πρόταση, θα δείξουμε ότι

$$f_{\mathbf{n}} < \mathbf{2}^{\mathbf{n}}, \ \mathbf{n} \geq \mathbf{0}.$$

Ιροφανώς, για $\mathbf{n = 0,1}$ η ανισότητα ισχύει.
'ποθέτουμε αληθινό τον ισχυρισμό μας για όλα τα $\mathbf{k < n}$ και προχωρούμε να τον είξουμε για τον $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{f_n = f_{n-1} + f_{n-2} < 2^{n-1} + 2^{n-2} = 2^{n-2} \cdot 3 < 2^{n-2} \cdot 4 = 2^n}.$$

η ανισότητα ισχύει για κάθε $\mathbf{n} \geq 0$.□

ιαπιστώνουμε απ' όλη την προηγούμενη συζήτηση ότι οποιαδήποτε κατασκευή ούμε να κάνουμε στο σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών, την αντίστοιχη μπορούμε να υμε στο σύνολο Φ. Με άλλους λόγους, το Φ δεν είναι παρά ένα αντίγραφο του $\mathbb{N}$.
Ι προηγούμενη αξιωματική διαδικασία οφείλεται στον μαθηματικό G. Peano.□

Ιρόβλημα 1.6. Αν από τις προϋποθέσεις που θέσαμε στην αρχή της παραγράφου ɔέσουμε την «δ ένεση», να ελέγξετε, ποιές από τις προηγούμενες κατασκευές και ίσεις ισχύουν.□

ìσεις

ισκηση 1.4. Να δείξετε ότι

$$X \times (Y_1 \cup \ldots \cup Y_n) = (X \times Y_1) \cup \ldots \cup (X \times Y_n)$$
$$X \times (Y_1 \cap \ldots \cap Y_n) = (X \times Y_1) \cap \ldots \cap (X \times Y_n)$$

ποιαδήποτε σύνολα $X, Y_1, \ldots, Y_n$.□

ισκηση 1.5. Για $A_1, A_2 \subseteq X$ έχουμε

ι $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$.□

ισκηση 1.6. Για $B_1, B_2 \subseteq Y$ έχουμε

ι $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

i) $f^{-1}(C_Y B) = C_X(f^{-1}(B))$.□

ισκηση 1.7. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f:(-1,1) \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από τη σχέση

$$f(x) = \frac{x}{1-|x|}$$

αμφίεση της οποίας η αντίστροφη είναι η συνάρτηση $g:\mathbb{R} \to (-1,1)$ που ορίζεται από

$$g(x) = \frac{x}{1+|x|}. \square$$

ικηση 1.8. Δίνονται ένα σύνολο X και το μοναδιαίο διάστημα

$$[0,1] = \{x/x \in \mathbb{R}, 0 \le x \le 1\}.$$

ζουμε ***ασαφές*** (fuzzy) υποσύνολο του X κάθε απεικόνιση $\varphi : X \to [0,1]$. Για κάθε ο αριθμός $\varphi(x)$ μας δείχνει το ποσοστό με το οποίο ανήκει το x στο φ.

ν $\varphi(x) = \frac{1}{2}$ το x ανήκει στο φ κατά 50%. Αν $\varphi(x) = 1$, το x ανήκει στο φ 100%, ενώ $x) = 0$ τότε το x δεν ανήκει στο φ.

ιμε ότι το ασαφές υποσύνολο $\varphi : X \to [0,1]$ ***περιέχεται*** στο ασαφές υποσύνολο $\to [0,1]$ αν συμβαίνει

$$\varphi(x) \le \psi(x) \qquad \text{για κάθε } x \in X,$$

ή το ποσοστό με το οποίο το x ανήκει το στο φ δεν ξεπερνά το ποσοστό με το οποίο νήκει στο ψ.

α δείξετε ότι

$\varphi \subseteq \varphi$

$\varphi \subseteq \psi$ και $\psi \subseteq \omega \Rightarrow \varphi \subseteq \omega$

$\varphi \subseteq \psi$ και $\psi \subseteq \varphi \Rightarrow \varphi = \psi$. □

σκηση 1.9. Η ***ένωση*** δύο ασαφών υποσυνόλων $\varphi, \psi : X \to [0,1]$ ορίζεται να είναι το ς υποσύνολο $\varphi \cup \psi : X \to [0,1]$ που δίνεται από

$$(\varphi \cup \psi)(x) = \max(\varphi(x), \psi(x)), \qquad x \in X.$$

ή $\varphi \cap \psi : X \to [0,1]$ ορίζεται αντίστοιχα από

$$(\varphi \cap \psi)(x) = \min(\varphi(x), \psi(x)), \qquad x \in X.$$

ίξετε ότι

$\varphi \cup (\psi \cup \omega) = (\varphi \cup \psi) \cup \omega$ $\qquad$ $\varphi \cap (\psi \cap \omega) = (\varphi \cap \psi) \cap \omega$

$\varphi \cup \psi = \psi \cup \varphi$ $\qquad$ $\varphi \cap \psi = \psi \cap \varphi$

$\varphi \cup \varphi = \varphi$ $\qquad$ $\varphi \cap \varphi = \varphi$

ιμη ότι

$\varphi \cap (\psi \cup \omega) = (\varphi \cap \psi) \cup (\varphi \cap \omega)$

$\varphi \cup (\psi \cap \omega) = (\varphi \cup \psi) \cap (\varphi \cup \omega)$. □

σκηση 1.10. Το ***συμπλήρωμα*** του ασαφούς υποσυνόλου $\varphi : X \to [0,1]$ είναι το ς υποσύνολο $\overline{\varphi} : X \to [0,1]$ που ορίζεται από:

$$\overline{\varphi}(x) = 1 - \varphi(x), \qquad \text{για κάθε } x \in X.$$

ίξετε ότι